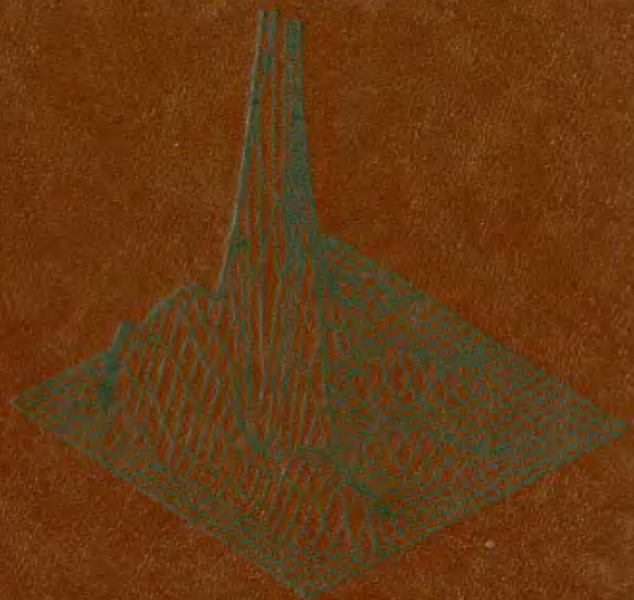


Н.Г. Преображенский
В.В. Пикалов

НЕУСТОЙЧИВЫЕ
ЗАДАЧИ
ДИАГНОСТИКИ
ПЛАЗМЫ



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Н. Г. Преображенский, В. В. Пикалов

НЕУСТОЙЧИВЫЕ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ ПЛАЗМЫ

Ответственный редактор
д-р физ.-мат. наук *А. К. Ребров*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1982

УДК 533.9.082.519.6.523

Преображенский Н. Г., Пикалов В. В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. — Новосибирск: Наука, 1982.

Монография посвящена методам анализа и решения неустойчивых обратных задач, возникающих при диагностике низко- и высокотемпературной плазмы. Описываемые алгоритмы широко иллюстрируются модельными расчетами и примерами обработки данных реального диагностического эксперимента.

Книга предназначена для научных работников и инженеров, занимающихся исследованием плазмы, в том числе астрофизиков, а также для аспирантов и студентов вузов.

Ил. 48. Табл. 3. Библиогр. 382.

П 1704070000—88462—82, кн. 2
055(02)—82

© Издательство «Наука», 1982 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы вычислительной математики, реализуемые на современных ЭВМ, все шире проникают в физику плазмы, в том числе и в проблематику, связанную с диагностикой плазмы. Возникающие при этом задачи, которые в соответствии с принятой в математической физике терминологией, как правило, относятся к классу обратных, очень часто характеризуются своеобразной неустойчивостью. Она выражается в том, что малым изменениям в регистрируемых функционалах могут отвечать большие изменения в решениях задач.

Неустойчивое решение — один из атрибутов так называемой некорректности задач математической физики. Теория некорректных задач получила за последние годы значительное развитие, главным образом благодаря усилиям математиков отечественной школы. Анализ этих задач и методам их решения посвящено уже несколько монографий и большое количество обзорных статей. Однако с точки зрения потребностей большого отряда физиков-экспериментаторов, работающих с плазмой и так или иначе соприкасающихся с ее диагностикой, в данной области все еще сохраняется своего рода информационный вакуум. Дело в том, что, во-первых, редкий экспериментатор рискнет в одиночку пробираться до нужных ему приложений сквозь джунгли теорем и многочисленных понятий функционального анализа, которыми обычно изобилуют упомянутые монографии и обзоры. Во-вторых, если он даже и преодолет все чисто математические преграды, то скорее всего будет разочарован приобретенным «сухим остатком», ибо, кроме нескольких простейших и многократно повторяющихся примеров классических приложений типа редуцированной задачи Рэлея, инверсии Абеля или дифференцирования экспериментальной функции, он почти ничего для себя не найдет. Между тем, в много-

численных статьях, разбросанных по разнообразным журналам (иногда совершенно неожиданным, скажем журналам по радиобиологии или геофизике), можно отыскать массу интереснейших алгоритмов и примеров, непосредственно относящихся к диагностике плазмы.

Авторы этой книги предприняли попытку перебросить мост от современных математических достижений в сфере исследования неустойчивых задач к практике диагностического плазменного эксперимента. Основная цель, однако, состояла не в том, чтобы рекомендовать экспериментатору для конкретной ситуации определенный вычислительный рецепт или готовую программу, а в том, чтобы помочь ему почувствовать как важность и нетривиальность процедуры корректной интерпретации имеющихся у него данных, так и наличие богатого арсенала средств для такой интерпретации. Авторы стремились проиллюстрировать алгоритмы разнообразными примерами из плазменной диагностики, подчас даже дискуссионными. При этом, описывая алгоритмы, они пытались, по возможности не впадая в упрощенчество, оставаться на уровне так называемой «физической строгости». Леммы и теоремы, за редкими исключениями, были изъяты, однако некоторые наиболее важные понятия функционального анализа сочли целесообразным оставить (разумеется, с соответствующими пояснениями).

Конечно, всякое путешествие между Сциллой педантизма и Харибдой вульгаризации всегда чревато опасностью отклониться от правильного курса. Если же такого рода отклонений вправо и влево будет не одно, а несколько, то авторы попадут под огонь критики сразу с двух сторон. Однако, поскольку решение написать книгу в конце концов было принято, авторы готовы к этому. Более того, они будут чрезвычайно признательны за все деловые замечания.

За обсуждение различных вопросов, затрагиваемых в монографии, авторы искренне благодарят А. Е. Булышева, Ю. Е. Воскобойникова, В. Ф. Китаеву, В. Н. Колесникова, В. В. Лебедеву, Т. С. Мельникову, А. И. Седельникова, В. С. Сухоруких, С. П. Толпину, В. П. Федосова, Л. Л. Фрумина. За помощь в оформлении рукописи авторы признательны Л. И. Козловой и А. В. Булатовой.

ГЛАВА I

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Термин «диагностика плазмы» вошел в широкое употребление примерно четверть века назад, когда в наиболее развитых странах мира развернулись исследования по управляемому термоядерному синтезу. Заимствованный из медицины, этот термин поначалу действительно отражал ситуацию, представлявшуюся в известной степени патологической, поскольку поведение горячей плазмы, удерживаемой магнитным полем, резко отличалось от имевшихся тогда в распоряжении экспериментаторов теоретических предсказаний. Как справедливо отмечалось в монографии [172], плазма вела себя наподобие больной, страдающей неизвестной болезнью, а ее исследователи напоминали пезадачливых эскулапов, пытавшихся поставить диагноз, не имея даже термометра.

Со временем о диагностике плазмы стали говорить в более широком смысле слова. Термин переключался и в традиционную физику газового разряда, и в астрофизику, и в газодинамику; фактически он стал синонимом измерения основных плазменных или газовых характеристик: скалярных параметров типа плотности и температуры, векторных полей — скорости, напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{B} , важнейших функций распределения компонентов системы и т. п.

Прогресс в диагностике плазмы до последнего времени почти исключительно определялся новыми аппаратными разработками и физическими идеями, питательной почвой для которых служили в первую очередь атомная и молекулярная спектроскопия, квантовая электроника, ядерная физика. Так, неотъемлемыми диагностическими элементами почти любой современной крупной плазменной установки являются спектрометры различных волновых

диапазонов и разной разрешающей силы, лазеры для реализации методов рассеяния или поглощения на электронах и атомах, оптические и микроволновые интерферометры, зонды, калориметры, поляризационные приборы, магнитные анализаторы, счетчики частиц и т. п. Зачастую это приборы достаточно внушительных габаритов, такие, как многоканальные масс-анализаторы, многометровые спектрометры вакуумного ультрафиолета, нейтронные детекторы, содержащие по несколько тонн смеси парафина и Li_2CO_3 (Принстонский токамак) и т. п. В других случаях это, наоборот, сравнительно небольшие по размерам и филигранные по исполнению приборы, компоненты которых лежат на пределе возможностей современной технологии: прецизионные фурье-спектрометры, голографические решетки с несколькими тысячами штрихов на миллиметр, многопроходные высококонтрастные интерферометры Фабри — Перо, импульсные микрозонды, томографы со сложной системой камер-обскур и др. Отметим, в частности, что требования по разрешающей способности в задачах лазерного термоядерного синтеза исследователи ведущих лабораторий формулируют сегодня как $1 \cdot 10^{-6}$ м по пространству и $1 \cdot 10^{-12}$ с по времени [379].

Логика развития методов диагностики плазмы, однако, такова: чем изощреннее способы измерения плазменных характеристик, тем сложнее чисто математическая, расчетная техника, используемая при обработке и интерпретации экспериментальных данных. Неотъемлемым элементом любой серьезной диагностической процедуры оказывается ЭВМ. Более того, с развитием вычислительной техники становится необходимой радикальная перестройка взглядов на саму постановку диагностического эксперимента.

Принципиальная особенность большинства современных регистрирующих устройств — их «многомерность», что выражается в огромной ширине канала приема информации и емкости запоминающего устройства. Так, если информационное содержание типичной осциллограммы процесса составляет примерно 10^2 бит, то 1 см^2 поля двумерного оптического изображения содержит около 10^5 бит; при переходе к голографической регистрации эта величина возрастает еще на несколько порядков. Уже по указанной причине использование ЭВМ совершенно неизбежно.

Другим, не менее важным обстоятельством является то, что современный диагностический эксперимент настоятельно требует создания многоцелевых систем обработки, интерпретации, планирования и управления. Такая система должна быть достаточно гибкой, универсальной и легко приспособляемой ко вновь возникающим режимам. В качестве примера можно назвать разработанную в Институте прикладной математики АН СССР систему ЭОС, предназначенную для обработки экспериментов по диагностике плазмы [215]. Ее логическая структура и мониторинговая система таковы, что она может быть нацелена на обработку широкого класса экспериментов путем выбора наполнения соответствующих модулей.

Наконец, нужно иметь в виду, что потребность в использовании ЭВМ заложена в самой природе плазмы как «диффузной» или «плохо организованной» системы [49, 196]. Динамические уравнения для плазмы нетрудно сформулировать, исходя из классических уравнений движения для механических переменных и уравнений Максвелла для электромагнитных переменных. Однако поиск аналитических решений этих уравнений динамики безнадежен из-за их нелинейности и бесконечного числа степеней свободы. Вместе с тем разнообразные эффекты относительно просто обнаруживаются в результате машинного эксперимента.

«Диффузные» особенности плазмы выражаются в том, что обычно трудно бывает выделить небольшое число определяющих параметров системы и установить четкие, однозначные направления причинно-следственной связи между ними. В результате рождаются весьма громоздкие многопараметрические и функциональные модели плазменных объектов, исследование которых без ЭВМ невозможно. Примерами могут служить двумерная МГД-модель плазменного фокуса, неоклассические модели для тороидальной конфигурации, дефлаграционная модель непрерывного оптического разряда, многочисленные модели газоразрядных лазерных систем и т. п.

В этих условиях исключительно важную роль играет принцип использования случайных процессов для моделирования плазменного эксперимента на ЭВМ с дальнейшей регистрацией и обработкой получаемых числовых характеристик. Первому этапу можно поставить в соответствие методы создания объекта в реальном лабораторном экспе-

рименте, а второму — измерения и методы диагностики. В процессе моделирования можно создавать искусственные ситуации, по очереди включая и выключая действия отдельных факторов. Благодаря этому возможности машинного эксперимента зачастую шире, чем реального.

Последовательное привлечение для целей моделирования случайных процессов и закона больших чисел связано, как известно, с алгоритмами Монте-Карло, цепями Маркова и реализацией так называемой существенной выборки. Как отмечают авторы работы [77], здесь приемлема аналогия с опросами общественного мнения: выясняя взгляды $\sim 10^3$ типичных американских избирателей, Институт Гэллага в США неплохо предсказывает результаты всеобщих выборов, в которых принимает участие $\sim 10^8$ избирателей.

Одной из основных трудностей численного решения задач физики плазмы является неустойчивость разностных уравнений, соответствующих даже простейшим моделям. В качестве примера приведем ситуацию для широко используемой в приложениях магнитогидродинамической модели [23]. В процессе анализа в рамках этой модели роли эффектов, связанных с конвективным переносом, часто встает вопрос, каким образом возникают большие ошибки при вычислении конвективной производной, если при аппроксимации последней составлены простые разностные схемы с той же формальной точностью, что и в других разностных уравнениях. Дело заключается в том, что если разностные члены, соответствующие конвективной производной, записаны стандартным способом, то уравнения могут оказаться неустойчивыми. Вместо них должны использоваться другие, менее точные, но зато устойчивые разностные уравнения [193].

Анализ устойчивости включает несколько этапов. Применительно к упомянутой задаче они последовательно рассмотрены в [23]. Мы укажем здесь лишь на роль важной теоремы Крайса [316, 317], дающей необходимые и достаточные условия устойчивости разностной аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, к которым в конечном счете сводится более сложная нелинейная задача. Содержание теоремы Крайса, представляющей интерес и для дальнейшего изложения, можно кратко проиллюстрировать на простейшем примере.

Рассмотрим уравнение

$$\partial u / \partial t = a(x)(\partial u / \partial x), \quad (1.1)$$

для которого не представляет труда записать линейно устойчивую разностную аппроксимацию. Если в соответствующее уравнение подставить правильное решение, то правая и левая части будут различаться на величины порядка δx^m и δt^n , где δx — пространственный, а δt — временной шаг. Разумеется, эти члены возникают в результате процедуры «обрезания» за счет аппроксимации. Тогда по Крайсу, если в разностном уравнении существует член диффузионного типа (с коэффициентом диффузии $D > 0$) или искусственно добавляется таковой, причем его порядок по крайней мере на единицу ниже, чем ошибки обрезания (δx^{m-1} , δt^{n-1} или ниже), уравнение будет устойчивым.

Легко показать, что при наличии больших градиентов параметров в разностных аппроксимациях конвективных производных импульса, магнитного потока и энергии для МГД-уравнений появятся отрицательные коэффициенты диффузии, т. е., согласно теореме Крайса, возникает нелинейная численная неустойчивость. Задача, однако, может быть решена с помощью преднамеренного добавления в исходные уравнения компенсационных членов типа искусственной вязкости [193]. Известен ряд более тонких расчетных схем, обеспечивающих устойчивость задачи при минимуме вносимых искажений [194].

Что же касается собственно диагностической стороны физики плазмы, то проблемы устойчивости оказываются здесь значительно сложнее и разнообразнее. На причинах этого следует остановиться подробнее.

Как известно, в математической физике принято делить задачи на прямые и обратные в зависимости от того, как они ориентированы по отношению к направлению причинно-следственной связи: по ходу последней или против хода. При такой классификации основная масса диагностических задач попадает в число обратных. К прямым следует относить лишь задачи, связанные с регистрацией «продуктов выхода» из плазмы, если это и есть конечная цель диагностического эксперимента: определение локальных и интегральных радиационных потерь, эффективных времен жизни возбужденных состояний в плазме, тепловых и диффузионных потоков и т. п.

Основная трудность решения обратных задач вида

$$K\varphi = f, \quad (1.2)$$

где φ и f — элементы метрических пространств Φ , F , а $K : \Phi \rightarrow F$ — непрерывное отображение, связана с нарушением требований корректности Адамара [297]. Последние состоят в том, чтобы для каждого $f \in F$ решение φ задачи (1.2): а) существовало, б) было единственным (однозначно определенным в Φ), в) было устойчивым в Φ , т. е. непрерывно зависело от f .

Третье условие, наиболее существенное для дальнейшего изложения, можно сформулировать в более явном виде путем введения в рассмотрение метрик ρ_Φ , ρ_F пространств Φ и F . Именно, условие устойчивости предполагает, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, при котором $\rho_\Phi(\varphi_1, \varphi_2) \leq \varepsilon$, если $\rho_F(f_1, f_2) \leq \delta$.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, являются, по Адамару, поставленными некорректно. Отметим, что Адамару принадлежит и классический пример некорректной задачи: это задача Коши для уравнения Лапласа.

В некоторых специальных диагностических задачах, связанных с управлением режимом разряда на основе полученной информации, более удобной в прикладном отношении может быть несколько иная трактовка условий корректности, отвечающая современным понятиям кибернетики. В этих случаях исходными являются термины множества переходов для множества операндов, которые определяют преобразование. Преобразование может быть задано не указанием физической причины изменений, а конкретизацией начальных и конечных состояний операндов данного множества. При таком подходе к проблеме корректности в условиях абстрагирования от рассмотрения совокупности реальных физических факторов возникают определенные модификации адамаровских условий корректности. Однако на этих более специальных вопросах мы останавливаться не будем.

Хорошо известно, что отношение математиков и физиков-экспериментаторов к классификации задач на корректные и некорректные в течение длительного времени было далеко не тождественным. Преобладающее большинство математиков, в том числе и сам Адамар, определили свою позицию так: если данная задача не удовлетворяет

требованиям корректности, то она практически неинтересна и физически бессодержательна. Правда, еще в 30-х годах Тейлор, рассматривая устойчивость системы двух несжимаемых жидкостей, разделенных некоторой поверхностью, которая движется по направлению к более легкой жидкости, показал, что соответствующий потенциал скоростей как раз является решением задачи Коши для уравнения Лапласа (пример Адамара) [199]. Несколько частных примеров было также указано Курантом [116]. Всё же в области изучения некорректных задач среди математиков долго сохранялся застой.

Для физиков-экспериментаторов и других представителей прикладных дисциплин вопроса о том, содержательны или бессодержательны те или иные обратные задачи, которые математик отнес бы к классу некорректных, как правило, не существовало. Ответ давала сама логика развития соответствующих разделов физики, химии, техники. В итоге подобно известному персонажу Мольера, который очень удивился, узнав, что всю жизнь говорит прозой, многие физики десятки лет и не подозревали, что весьма тесно соприкасаются с такой «премудростью», как некорректные задачи.

Хотя трудности решения (в первую очередь наличие неустойчивости) некоторых обратных диагностических задач в целом ряде случаев и были замечены экспериментаторами, они не казались непреодолимыми. Отдельные остроумные приемы, придуманные практиками, в сочетании с дополнительными измерениями, а также с хорошей интуицией физика-экспериментатора нередко обеспечивали вполне разумные результаты интерпретации данных. Это имело как очевидные положительные, так и менее очевидные отрицательные последствия, связанные с довольно частой недооценкой результатов математиков, полученных уже в более поздний период.

В привлечении внимания математиков и физиков к проблеме некорректности особую роль сыграли работы акад. А. Н. Тихонова. Еще в начале 40-х годов он провел исследования, ставшие сегодня классическими [210]. Прежде всего А. Н. Тихонов подчеркнул особую роль третьего условия корректности Адамара (условия устойчивости). Поскольку данные, подлежащие математической обработке, всегда отягощены некоторой погрешностью, то в силу неустойчивости решения $\varphi = K^{-1}f$ эти данные в

физическом смысле не определяют φ , какова бы ни была их точность. Однако здесь предполагается, что на заданную с погрешностью функцию f действует точный оператор K^{-1} . Таким образом, обратная некорректная задача может стать вполне содержательной, если будет пересмотрена сама ее постановка. Именно, при известной $f_\sigma \in F$ такой, что уклонение $\rho(f, f_\delta) \leq \delta$, решением можно считать любой элемент множества $\{\varphi \in \Phi | \rho(K\varphi, f_\delta) \leq \delta\}$ и, выбирая из этого множества элемент φ_δ на основе некоторых дополнительных соображений количественного и качественного характера, можно построить устойчивый алгоритм приближенного решения обратной задачи (1.2).

В основополагающей работе [210] А. Н. Тихонов в качестве такого дополнительного условия указал на компактность множества решений¹⁾. Тогда решение, если оно единственно в таком классе, становится устойчивым. Этот факт вытекает из известной топологической леммы: взаимно однозначное и непрерывное отображение компактного метрического пространства M в метрическое пространство N является гомеоморфизмом.

Остается еще одна трудность, состоящая в том, что при возмущенной правой части f_δ уравнения (1.2) его решение может и не существовать. Однако это затруднение можно преодолеть, переходя, например, от обычного решения к так называемому квазирешению [81]. При заданном (обычно компактном) множестве M квазирешением уравнения (1.2) является элемент $\bar{\varphi}$, минимизирующий функционал невязки: $\rho(K\bar{\varphi}, f) = \inf\{\rho(K\varphi, f) : \varphi \in M\}$. Тогда на основе проекционных и некоторых других методов можно предложить целый ряд эффективных алгоритмов для численного нахождения квазирешений. В дальнейшем весьма конструктивным оказался разработанный А. Н. Тихоновым и его учениками принцип отбора модели, сопоставимой с точностью наблюдений и имеющей минимальную сложность, причем последнее понятие также может быть формализовано с помощью непрерывных, неотрицательных «функционалов сложности», удовлетворяющих некоторым специальным условиям [217].

¹⁾ Напомним, что множество M метрического пространства U называется компактным, если любая последовательность элементов этого множества содержит сходящуюся подпоследовательность.

За последние два десятилетия разработано большое число эффективных, математически обоснованных алгоритмов решения некорректных обратных задач. Применение их для диагностики плазмы становится все более широким. Однако нельзя не отметить, что их внедрение и совершенствование в приложении к тому или иному классу задач не всегда происходит легко и гладко. Тормозящих факторов можно указать несколько.

Во-первых, это приверженность довольно многих экспериментаторов к предельно простым, внешне прозрачным по структуре и, на первый взгляд, вполне устойчивым расчетным схемам первичной обработки и интерпретации данных измерений. Очень популярен, например, метод подгонки (иначе, подбора, проб и ошибок), состоящий в том, что исследователь не решает обратной задачи как таковой, а много раз решает прямую задачу, выбирая в итоге такую функцию, которая, по его мнению, приемлемым образом соответствует как «здравому смыслу», так и исходным данным. Аналогичные субъективные соображения часто являются определяющими в методе итераций, а также в разнообразных приемах алгебраизации задачи с использованием квадратурных формул или полиномов. Принципиальный изъян всех «стихийных» методов такого рода состоит в отсутствии выделенного компакта, на котором отыскивается решение, а следовательно, и гарантии, что найдено наиболее верное решение; причем последнее, вообще говоря, может и не сходиться к точному. Отметим, что довольно подробный критический анализ таких полуинтуитивных подходов выполнен в [60].

Во-вторых, это скептическое отношение многих специалистов-прикладников к вопросам существования и единственности решения изучаемых задач. Часто можно слышать, что существование и единственность решения суть требования надуманные и сугубо формальные, поскольку изучается реальное явление, которое и представляет собой искомое решение, а в силу его детерминированности другого решения, очевидно, и быть не должно. Такого рода точка зрения основана на неправомерном отождествлении реального явления с его математической моделью. Последняя, разумеется, отражает лишь некоторые черты объекта, и в рамках модельного рассмотрения существование либо единственность решения — категории отнюдь не тривиальные. (подробнее см., например, в [177]).

В-третьих, это своеобразный «машинный фетишизм», развитый у некоторой части физиков. Внедрение в диагностический эксперимент ЭВМ со все лучшими и лучшими параметрами оказалось фактором, нередко усыпляющим бдительность: все большая доступность обработки крупных массивов числовой информации нередко порождала явную переоценку истинных возможностей такой обработки. Новые способы решения некорректных задач, постепенно входившие в экспериментальную практику, при этом расценивались как сложная «кухня», хотя и модернизированная. В известной мере повторилась ситуация, которая в свое время имела место в квантовой электродинамике, когда физики начали широко осваивать диаграммы Фейнмана. Тогда один из видных теоретиков Йост полупутя заметил: Под деморализующим влиянием квантовомеханической теории возмущений в трактовке Фейнмана потребность физика-теоретика в математических знаниях свелась к рудиментарному владению латинским и греческим алфавитами.

В связи со сказанным полезно воспроизвести элементарный пример, приводимый А. Н. Тихоновым в обзоре [215]. Возьмем систему уравнений

$$\begin{aligned} x + 7y &= 5; \\ \sqrt{2}x + \sqrt{98}y &= \sqrt{50}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

которая при наличии во втором уравнении точных иррациональных коэффициентов имеет бесконечное число решений. Если же рассматривать приближенные системы, получаемые при введении (1.3) в ЭВМ, и проводить вычисления с точностью до 100, 300 и 500 десятичных знаков, то $x_{100} \simeq 0$; $x_{300} \simeq 1,6$; $x_{500} \simeq 5$. Ясно, что здесь факт появления некоторого выделенного решения и его неустойчивость — продукты ЭВМ. Легко представить себе, насколько существенными могут оказаться «благоприобретенные» компьютерные искажения решения современных сложных диагностических задач в условиях достаточно поверхностного, бесконтрольного отношения к алгоритмическим деталям.

Все сказанное, по мнению авторов, может служить достаточным основанием для написания книжки, в которой кратко и по возможности в доступной для экспериментаторов форме излагались бы основные современные

методы анализа и решения некорректных обратных задач, а иллюстрации соответствовали бы повседневно возникающим на практике диагностическим задачам. Как теоретическая, так и иллюстративная часть никоим образом не претендует на полноту. В первом случае читатель легко сможет углубить свои знания, обратившись к прекрасным монографиям и обзорам, которые частично уже цитировались [60, 81, 215, 217] или приводятся далее в тексте. Во втором случае оправданием может служить столь стремительный темп развития конкретных приложений, что какая-либо полнота здесь пока в принципе недостижима (особенно это относится к многомерным и нелинейным задачам).

Авторам хотелось бы надеяться, что данная монография явится полезным дополнением к имеющейся в распоряжении экспериментатора довольно богатой литературе по проблемам диагностики плазмы.

Г Л А В А 2

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ 1. Существование и единственность решения

Как мы уже видели, согласно Адамару, задача математической физики или краевая задача для уравнения с частными производными является поставленной корректно, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных (устойчиво). Как в физическом, так и в чисто математическом плане спектр задач диагностики плазмы настолько широк и разнообразен, что сколько-нибудь последовательный и исчерпывающий анализ свойств корректности всех разновидностей этих задач вряд ли возможен. Тем не менее, хотя бы некоторые наиболее часто встречающиеся типы задач заслуживают рассмотрения; в частности, всегда представляет интерес изучить характерные особенности класса данных, при которых решение задачи существует. Выяснение степени

узости такого класса данных помогает строить наиболее эффективные алгоритмы решения.

Заметим прежде всего, что обратная задача исследования свойств плазмы может оказаться неразрешимой уже по тривиальной причине: в зарегистрированном сигнале может попросту не содержаться той диагностической информации, которой мы интересуемся. Иными словами, эксперимент поставлен неудачно и задача теории в этом случае — указать правильную, или, как говорят, информативную схему проведения опыта. Например, в задачах лазерного рассеяния, а также в томографии весьма непрост выбор минимального количества направлений просвечивания, при котором за допустимый интервал времени была бы наиболее полно обследована внутренняя структура плазменного объема сложной конфигурации.

Многие диагностические задачи, как будет показано ниже, формулируются с помощью интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (2.1)$$

Относительно существования решения таких задач необходимо сделать несколько замечаний:

1) если ядро $K(x, y)$ есть полином по переменной x , т. е.

$$K(x, y) = \sum_{i=0}^M k_i(y) x^i, \quad (2.2)$$

то уравнение (2.1) будет иметь решение, если правая часть имеет тот же полиномиальный вид:

$$f(x) = \sum_{i=0}^M l_i x^i. \quad (2.3)$$

В частности, если $k_0(y) = c_1 y$, $k_1(y) = c_2$, $M = 1$, а $f(x)$ не является линейной функцией, то решения уравнения (2.1) не существует;

2) условия существования решения (2.1) нарушаются и в том случае, когда при наличии ядра $K(x, y)$, имеющего непрерывную производную по x , правая часть $f(x)$ содержит точки, где производная не определена (например, f задана в виде ломаной линии);

3) для симметричных ядер $K(x, y) = K(y, x)$ может быть поставлена задача на собственные значения и собственные функции:

$$\int_a^b K(x, y) \psi_i(y) dy = \lambda_i \psi_i(x), \quad (2.4)$$

причем λ_i существуют и действительны, а ψ_i ортогональны [106]. Тогда решение уравнения (2.4) в силу теоремы Гильберта — Шмидта существует, если

$$f(x) = \sum_i f_i \psi_i(x), \quad f_i = (f, \psi_i), \quad (2.5)$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение;

4) если в предыдущем случае система собственных функций $\psi_i(x)$ является полной и при этом $K(x, y) \in L_2[a, b]$, $f(x) \in L_2[a, b]$ ¹⁾, то решение φ , также принадлежащее $L_2[a, b]$, существует и притом будет единственным тогда и только тогда, когда ряд $\sum_i \lambda_i^{-2} f_i$ сходится.

Это утверждение называется теоремой Пикара [106];

5) если вместо (2.1) рассмотреть уравнение свёртки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.6)$$

то, переходя к фурье-образам функций K , φ и f , обозначаемых далее \tilde{K} , $\tilde{\varphi}$, \tilde{f} , используя теорему Бореля [86]:

$$\tilde{K}(\omega) \tilde{\varphi}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \quad (2.7)$$

и совершая обратное преобразование Фурье, находим

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \tilde{K}^{-1}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega. \quad (2.8)$$

Однако нельзя забывать [86], что такое решение существует и принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$, если $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ ²⁾, $\{\tilde{f}(\omega) \tilde{K}^{-1}(\omega)\} \in L_2(-\infty, \infty)$.

¹⁾ $L_2[a, b]$ — множество всех функций, интегрируемых на $[a, b]$ в квадрате.

²⁾ $L_1[a, b]$ — множество всех функций, интегрируемых на $[a, b]$.

В случае произвольного выбора правой части $f(x)$ и наличия нулей у передаточной функции $\tilde{K}(\omega)$ решения уравнения (2.6) может не существовать.

Вопросы существования решения задач редукции к идеальному прибору, которые встречаются в самых разнообразных диагностических приложениях, достаточно детально разобраны в монографии [35]. Аналогичным аспектам другого, не менее важного класса задач, связанных с восстановлением функций через интегралы от нее, заданные на семействе кривых или поверхностей (задачи интегральной геометрии), посвящены большие разделы монографий [121, 195].

Непременным требованием к экспериментальным данным, отраженным, как мы видели, во втором условии корректности Адамара, является гарантия получения однозначного (единственного) результата. В связи с этим часто говорят о необходимости постановки полной обратной задачи. Однако задача может оказаться и неполной, приводя ко множеству решений и требуя от исследователя дополнительных данных для выбора одного из них. Весьма распространена, например, такая ситуация в спектроскопии плазмы. Укажем хотя бы на задачу о разделении перекрывающихся контуров спектральных линий. Если даже известно число компонентов, из которых складывается регистрируемый профиль $f(x)$, например два, то в силу очевидного соотношения

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = [f_1(x) + f_3(x)] + [f_2(x) - f_3(x)], \quad (2.9)$$

где $f_3(x) \neq 0$, нахождение исходных функций по заданной суммарной неоднозначно.

Много примеров неоднозначной постановки обратных задач, которая, кстати сказать, не всегда отчетливо видна и нередко дезориентирует экспериментаторов, можно найти в спектроскопии оптически плотной плазмы. Однако в простейших случаях удается проследить «механизм» проявления неединственности решения за счет не вполне адекватного моделирования реальной задачи. Приведем пример [174, 179]. Если оптическая плотность плазмы невелика, а функция источника неоднородного слоя $\varphi(y)$ соответствует условиям, налагаемым моделью Бартельса (см. ссылки в [174]), то из линеаризованного решения

уравнения переноса излучения следует соотношение

$$\int_a^b (\alpha x + \beta y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (2.10)$$

где $f(x)$ — функция, регистрируемая в эксперименте, α и β — параметры. Как мы уже отмечали, в связи с формулами (2.2) и (2.3) $f(x)$ обязана быть линейной функцией, т. е. $f(x) = f_0 + f_1 x$. Но тогда любая функция источника $\varphi(y)$, удовлетворяющая условиям, наложенным только на ее нулевой и первый моменты:

$$\int_a^b \varphi(y) dy = \alpha^{-1} f_1, \quad \int_a^b y \varphi(y) dy = \beta^{-1} f_0, \quad (2.11)$$

будет решением уравнения (2.10). Ясно, что отсутствие каких-либо ограничений на моменты более высокого порядка лишает это решение единственности.

Для уравнений типа (2.1) с симметричным ядром в классе $L_2[a, b]$ вопрос о единственности задачи, как уже указывалось, решается теоремой Пикара.

Для уравнения типа свертки (2.6) единственность решения, как легко убедиться, связана с наличием нулей у передаточной функции $\tilde{K}(\omega)$ в некоторой области вещественной оси. Именно, если $\tilde{K}(\omega_i) = 0$, то решением (2.6) может быть как функция $\varphi(y)$, находящаяся по (2.8) при условии, что в аргументе $\tilde{K}^{-1}(\omega)$ $\omega \neq \omega_i$, так и функция

$$\varphi_1(y) = \varphi(y) + (2\pi)^{-1} \sum_i a_i \exp(i\omega_i y), \quad (2.12)$$

где a_i — произвольные постоянные.

Следует иметь в виду, что передаточные функции реальных приборов, используемых в задачах диагностики плазмы, практически всегда имеют «нулевые» точки ω_i или целые области. Например, в оптике передаточная функция объектива при сильной дефокусировке или смазе изображения вследствие относительного смещения прибора и объектива равна нулю в некоторых точках [35]; кроме того, реальные оптические, радиотехнические, акустические и другие приборы имеют ограниченную полосу пропускания. Отсюда следует, что если спектр сигнала

$\tilde{\varphi}(\omega)$ содержит гармоники с частотами ω_i , то последние не дают вклада в $f(x)$, а следовательно, и не могут быть однозначно восстановлены.

В более сложной (многомерной) ситуации [158] результат измерения f (чаще всего не непосредственный, а уже найденный после предварительной фильтрационной и редуционной обработки зарегистрированного сигнала) оказывается связанным с функционалом φ искомым характеристик плазмы уравнением типа

$$a(\Delta t)^{-1} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt' \int_{z_1(x,y,t')}^{z_2(x,y,t')} \varphi dz = f(x, y, t). \quad (2.13)$$

Здесь Δt — время измерения, z_1 и z_2 — границы плазмы, a — некоторая константа. В данном случае неединственность решения может возникнуть, вообще говоря, по многим причинам: из-за учета искажений локальных характеристик плазмы, меняющихся во времени, вследствие необоснованного выбора числа направлений наблюдения, из-за наличия достаточно протяженных областей внутри плазмы, не дающих вклада в $f(x, y, t)$ и т. п. Таким образом, тщательный анализ выполнимости условия единственности решения совершенно необходим.

§ 2. Устойчивость решения

Если бы требования корректности обратной задачи сводились только к вопросам существования и единственности, проблема в целом все же была бы достаточно благоприятной как для анализа, так и для разработки конкретных алгоритмов. Именно с третьим условием корректности Адамара, устойчивостью, связаны основные трудности рассмотрения обратных задач.

В обширной математической литературе, посвященной некорректным задачам, приводится большое число примеров, иллюстрирующих неустойчивость. Часть таких примеров непосредственно соответствует постановкам задач диагностики плазмы; другая часть — это элементы, блоки указанных постановок. Перечислим некоторые из них:

1) дифференцирование (n -кратное, а также дробное) функции, известной приближенно [81, 217];

2) численное суммирование рядов Фурье с приближенно заданными коэффициентами [217];

3) обращение преобразования Лапласа [109];

4) аналитическое продолжение функции, известной лишь на части области, на всю область [120, 217];

5) решение интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма 1-го рода с неточно заданной правой частью, а также ядром [60, 109, 217];

6) решение задачи Коши для уравнения диффузии (теплопроводности) с обратным временем [7, 81], решение задачи радиационной кинетики в ретроспективном варианте [29];

7) решение задачи Коши для эллиптических уравнений [121];

8) решение задачи Дирихле для волнового уравнения [81];

9) решение вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений [81, 217];

10) решение интегральных уравнений 1-го рода в форме Стилтеса [62];

11) восстановление операторов, в частности, определение коэффициентов дифференциальных уравнений по информации о решениях этих уравнений (например, обратная задача Штурма — Лиувилля) [9, 133];

12) минимизация функционалов [217];

13) решение многочисленных типов задач линейного программирования, оптимального управления, дифференциальных игр и т. п. [3, 217];

14) решение широкого класса обратных задач квантовой теории рассеяния [78, 244].

Этот, отнюдь не исчерпывающий, перечень можно было бы легко дополнить не менее длинным списком неустойчивых многомерных и нелинейных обратных задач.

Каковы же те общие определяющие принципы, на которых основывается успешное решение некорректных обратных задач? Вернемся к основному операторному уравнению, рассматривавшемуся в гл. 1:

$$K\varphi = f, \quad \varphi \in \Phi, \quad f \in F, \quad (2.14)$$

K — вполне непрерывный (линейный) оператор, действующий из Φ в F . Оператор в бесконечномерном пространстве, обратный к вполне непрерывному, если и существует, то не является непрерывным [48], что и порожд-

дает некорректность решения (2.14). Однако задачу можно превратить в корректную, если рассматривать ее уже для другой пары пространств Φ_1, F_1 . В частности, если $\Phi_1 = \Phi$, то F_1 должно быть подпространством F , а если $F_1 = F$, то Φ_1 должно быть расширением Φ . Для многих классов неустойчивых задач, перечисленных выше, методы функционального анализа позволяют сравнительно легко осуществить подбор пар пространств, в которых эти задачи становятся устойчивыми [121].

Тем не менее чисто формальное развитие этой идеи, как правило, не является конструктивным по указанной выше причине. Дело в том, что некорректные задачи обычно возникают как задачи интерпретации результатов эксперимента, отягощенных случайными и систематическими погрешностями (в задачах диагностики — это погрешности f и зачастую оператора K), которые малы не в произвольном пространстве, а в пространстве, жестко определяемом особенностями измерительной процедуры, скажем в пространстве ограниченных функций.

Действительно плодотворным является иной подход, последовательно учитывающий информационные аспекты рассматриваемой обратной задачи. Неустойчивость с этой точки зрения есть следствие информационной недоопределенности и устранить ее возможно лишь с помощью внесения в алгоритм некоторой априорной нетривиальной информации, которой практически всегда располагает исследователь. Характер таких «информационных фрагментов» и способы их включения в постановку задачи могут быть весьма разнообразными. Процедуру их использования в широком смысле слова называют регуляризацией задачи. Так, сравнительно неплохие результаты, которые экспериментаторы время от времени получали на базе тех или иных «стихийных» методов, объяснялись регуляризацией, хотя часто и не вполне осознанной. Принципы отбора моделей и построения «функционалов сложности», введенные А. Н. Тихоновым, — тоже регуляризация, только последовательная, ясно формулируемая и учитывающая особенности реального эксперимента. Что же касается нередко встречающихся до сих пор попыток решить некорректную задачу за счет чисто математических ухищрений, без каких-либо дополнительных априорных данных, то они эквивалентны деятельности по созданию «perpetuum mobile», производящего информацию из ничего.

В связи с проблемой устойчивости обратных задач коснемся еще некоторых предвзятых точек зрения, имеющих хождение главным образом среди экспериментаторов.

Часто можно встретить явное или неявное противопоставление так называемых «слабо некорректных» задач, сводящихся к численному дифференцированию, восстановлению коэффициентов дифференциальных уравнений, решению почти вырожденных систем алгебраических уравнений и т. п., и «сильно некорректных» задач типа деконволюции свертки, обращения Фурье и Лапласа, решения уравнения теплопроводности с обратным временем и т. д. В частности, среди специалистов по диагностике плазмы бытует мнение о сравнительной легкости преодоления неустойчивости, сопровождающей различные модуляционные методы, методы одиночных и двойных зондов Ленгмюра, инверсию Абеля в различных вариантах, способы выделения различных уширяющих компонентов спектральной линии и др. [142].

К подобного рода иерархии обратных некорректных задач необходимо, однако, относиться с осторожностью. Рассмотрим простой пример, относящийся к задаче о редукции к идеальному спектральному прибору (уравнения (2.6) и (2.8)). Хорошо известны способы приближенного представления (2.8) в виде ряда, например:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_m b_m T_m f(x), \quad (2.15)$$

где коэффициенты b_m определяются ядром исходного уравнения Фредгольма (2.6), а $T_m = d^m/dx^m$ — оператор дифференцирования, действующий из F в Φ .

Сколько же членов суммы (2.15) реально имеет смысл удерживать, т. е. каков порядок m оператора дифференцирования в данной задаче?

Возьмем достаточно типичную схему регистрации спектра, включающую монохроматор (две щели равной спектральной ширины s) и приемно-регистрирующую систему (постоянная времени τ , скорость сканирования v) [102]. Тогда множитель $\tilde{K}^{-1}(\omega)$ в формуле (2.8) факторизуется в виде

$$\tilde{K}^{-1}(\omega) = \tilde{K}_M^{-1}(\omega) \tilde{K}_R^{-1}(\omega), \quad (2.16)$$

где фурье-трансформанты от аппаратной функции монохроматора \tilde{K}_M и приемно-регистрирующей системы \tilde{K}_R

выражаются формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_M &\simeq 1 - \omega^2 s^2 / 12, \\ \tilde{K}_R &\simeq (1 + i\omega v t)^{-1}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.16) и (2.15) и учитывая, что умножение на $(i\omega)^m$ эквивалентно m -кратному дифференцированию функции от x , находим

$$\varphi(x) = f(x) + vt f'(x) - s^2 f''(x) / 12 - s^2 vt f'''(x) / 12. \quad (2.18)$$

Таким образом, операция редукции в данном случае сводится к внесению поправок в экспериментальное спектральное распределение $f(x)$, выражаемых тремя членами с производными от этого распределения вплоть до третьей.

Полученный результат можно сопоставить, например, с формулами решения типичной задачи абелевой инверсии для аксиально-симметричной оптически плотной плазмы [166]. Как известно, в этом случае вдоль лучей зрения y измеряются эмиссионная $I(y)$ и трансмиссионная $\theta(y)$ функции для набора частот ν в выбранном спектральном интервале $\Delta\nu$. Обозначим $z_0(y) = I(y)[\theta(y)]^{-1/2}$ и введем в рассмотрение функционал $W(f, u - v) = uf(u)(u^2 - v^2)^{-1/2}$. Тогда для расчета радиальных $(0 \leq r \leq R)$ зависимостей коэффициентов поглощения $\kappa(r)$ и испускания $\varepsilon(r)$ оказываются справедливыми следующие формулы:

$$\kappa(r) = (\pi r)^{-1} d \left(\int_r^R W(\ln \theta, y - r) dy \right) \Big| dr; \quad (2.19)$$

$$\varepsilon(r) = \sum_i \varepsilon_i(r);$$

$$\varepsilon_0(r) = -(\pi r)^{-1} d \left(\int_r^R W(z_0, y - r) dy \right) \Big| dr; \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_i(r) = -(\pi r)^{-1} d \left(\int_r^R W(z_i, y - r) dy \right) \Big| dr;$$

$$z_i(y) = 2 \int_y^R W(\varepsilon_{i-1}, r - y) \left[1 - \operatorname{ch} \int_y^r W(\kappa, r' - y) dr' \right] dr.$$

Легко убедиться в том, что для получения приемлемого результата восстановления $\varepsilon(r)$ даже при оптической

толщине слоя $\tau_0 \geq 2$ ($\tau_0 = -\ln \theta$) пришлось бы учитывать существенно больше трех членов суммы, приводимой в (2.20), т. е. дифференцировать экспериментально измеренные функции $I(y)$ и $\theta(y)$ большее число раз, нежели в (2.18) [163]. Таким образом, представления о «слабой» и «сильной» неустойчивости задачи оказываются весьма относительными.

Среди специалистов по диагностике плазмы распространенным является также мнение о безусловной корректности задач (обычно прямых), сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. Много разновидностей таких задач дает, например, теория радиационного переноса в спектральных линиях и континууме [20]. При этом часто не учитывают того факта, что при численном решении уравнений 2-го рода наиболее употребимые вариационные методы (Ритца, Галеркина и т. п.) могут привести к неустойчивым решениям; например, небольшие ошибки в вычислении матричных элементов зачастую сводят на нет преимущества большого числа пробных функций при неортогональном базисе [200].

Рассмотрим в связи с этим характерный пример. Уолш [378] одним из первых попытался применить последовательную теорию радиационного переноса в линейчатом спектре к неравновесной низкотемпературной плазме и, в частности, к расчету пространственного распределения возбужденных атомов $n(r)$. Расчет производился методом Ритца, когда задача сводится к отысканию коэффициентов разложения a_i по пробным функциям $n_i(r) : n(r) = \sum_i a_i n_i(r)$. Величины a_i находятся из решения системы линейных однородных уравнений, к которой преобразуется исходное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Система имеет вид

$$\sum_{j=1}^J a_j (A_{ij} - \alpha_0 B_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, J, \quad (2.21)$$

причем α_0 — наименьший корень уравнения

$$\det(A - \alpha_0 B) = 0, \quad (2.22)$$

а матричные элементы записываются так:

$$A_{ij} = \int n_i(\mathbf{r}) n_j(\mathbf{r}) [1 - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dr + (1/2) \iint [n_i(\mathbf{r}) - n_i(\mathbf{r}')] [n_j(\mathbf{r}) - n_j(\mathbf{r}')] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dr dr', \quad (2.23)$$

$$B_{ij} = \int n_i(\mathbf{r}) n_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Здесь $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — вероятность того, что фотон, испущенный в точке \mathbf{r}' , будет поглощен атомом (ионом), находящимся в точке \mathbf{r} . В простейшем случае

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\rho) = - (4\pi\rho^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial\rho} \int_0^\infty \varepsilon(\nu) \exp[-\kappa(\nu)\rho] d\nu, \quad (2.24)$$

где $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, а $\varepsilon(\nu)$ и $\kappa(\nu)$ — коэффициенты испускания и поглощения, предполагаемые в отличие от (2.20) независимыми от пространственных координат. Уолш [378] рассматривал одномерную задачу (плоскопараллельный слой толщиной l), вводил координату ξ , отсчитываемую в направлении, перпендикулярном граням слоя, производил разложение $n(\xi)$ по трем пробным функциям: $n_0 = 1$, $n_1(\xi) = 1 - \xi^2$, $n_2(\xi) = 1 - \xi^4$ и полагал профили $\kappa(\nu)$ и $\varepsilon(\nu)$ гауссовыми.

Как отмечено в работе [182], рассчитывая матричные элементы A_{ij} и B_{ij} , Уолш допустил две вычислительные ошибки: должно быть $A_{02} = 8/3$ вместо $A_{02} = 8/5$ у Уолша и $B_{22} = 64/45$ вместо $B_{22} = 32/21$ у Уолша. Как видим, первая ошибка довольно существенна, а вторая, в общем, незначительна. Все же, учитывая, что остальные матричные элементы были найдены верно, в случае устойчивой схемы Ритца можно было бы ожидать, что искажения $n(\xi)$ не будут слишком велики. Расчеты, выполненные в [182], дали, однако, следующие результаты.

Полагая $A_{00} = 2 \ln(\kappa_0 l/2) = 6$, по Уолшу для уравнения (2.22) получим

$$\alpha^3 - 20,365\alpha^2 + 46,016\alpha - 20,024 = 0, \quad (2.25)$$

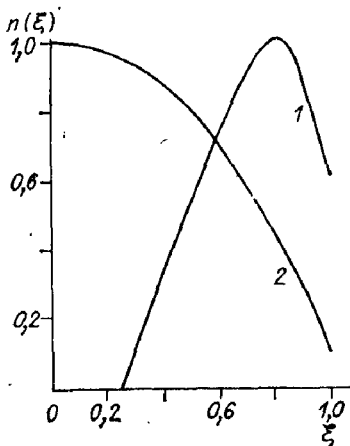


Рис. 1. Нормированная плотность возбужденных атомов $n(\xi)$.

1 — расчет по Уолшу (2.26); 2 — расчет с исправленными матричными элементами A_{02} и B_{22} (2.28).

где корни равны: $\alpha_0 = 0,580$; $\alpha_1 = 1,937$; $\alpha_2 = 17,850$.
Функция $n(\xi)$ при этом такова:

$$n(\xi) = 0,564 - 3,961(1 - \xi^2) + 3,154(1 - \xi^4) \quad (2.26)$$

и ее поведение в данной задаче лишено какого-либо физического смысла (рис. 1, кривая 1). Расчет с правильными матричными элементами вместо (2.25) дает

$$\alpha^3 - 31,870\alpha^2 + 213,28\alpha - 287,11 = 0. \quad (2.27)$$

Корни этого уравнения: $\alpha_0 = 1,806$; $\alpha_1 = 6,86$; $\alpha_2 = 23,19$. Нормированное в соответствии с (2.26) распределение $n(\xi)$ показано на рис. 1 (кривая 2) и выражается формулой

$$n(\xi) = 0,135 + 0,706(1 - \xi^2) + 0,159(1 - \xi^4). \quad (2.28)$$

В связи с отмеченными неустойчивостями задачи в [182] даны рекомендации по выбору миноров матриц A и B , содержащих элементы, находимые с неодинаковой точностью.

В следующих главах мы рассмотрим различные способы регуляризации неустойчивых задач, представляющих интерес с точки зрения диагностики плазмы.

Г Л А В А 3

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ ПРИЕМЫ ПОВЫШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Предварительные замечания

Особенности некоторых ранних методов решения обратных неустойчивых задач, о которых говорилось в гл. 1, состоят в том что, оставаясь в рамках этих методов, исследователь часто имеет возможность легко вносить в алгоритм довольно богатую и разнообразную априорную информацию. Тем самым границы применимости таких методов значительно расширяются, а поскольку структура их алгоритмов обычно очень проста, математически прозрачна и удобна с чисто расчетной точки зрения, исполь-

зование подобных методов зачастую оказывается вполне оправданным и разумным. Мы рассмотрим здесь несколько характерных примеров такого рода.

В диагностических задачах, как, впрочем, и во многих других приложениях, важную роль играет класс уравнений типа свертки (2.6). Это связано с широким использованием в измерительных задачах линейных однородных систем. Напомним, что входной $\varphi(x)$ и выходной $f(x)$ сигналы линейной системы связаны дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{m=0}^M a_m(x) (d^{M-m} f(x)/dx^{M-m}) = \varphi(x), \quad (3.1)$$

имеющим общее решение

$$f(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + \sum_i c_i f_i(x), \quad (3.2)$$

где $f_i(x)$ — линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (3.1), c_i — константы, определяемые граничными условиями. Член с суммой в (3.2) может отсутствовать, если определить $K(x, y)$ как функцию Грина задачи [149], т. е. потребовать, чтобы всюду на отрезке $[a, b]$

$$DK(x, y) = \delta(x - y), \quad (3.3)$$

причем $K(x, y)$ должна удовлетворять тем же краевым условиям, что и $f(x)$; D — дифференциальный оператор (3.1). Однородным (инвариантным к сдвигу) линейным системам должны соответствовать постоянные коэффициенты a_m в (3.1), разностный аргумент ядра интегрального уравнения и бесконечные пределы интегрирования, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y) \varphi(y) dy = f(x); \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.4)$$

Ранее мы уже касались вопросов существования и единственности решения (3.4) и отмечали наличие его неустойчивости, обязательной шумовой составляющей выходного сигнала или погрешности в задании ядра уравнения. Остановимся на этом подробнее.

Выделим в $f(x)$ стационарный случайный процесс $\xi(x)$ с нулевым средним и для простоты будем считать, что известна его корреляционная функция

$$R_{\xi}(y) = \langle \xi(x)\xi(x+y) \rangle, \quad (3.5)$$

хотя в задачах диагностики плазмы чаще имеется лишь некоторая информация о среднеквадратичных ошибках измерений $f(x)$ в отдельных точках, т. е. о дисперсиях

$$S^2(x) = \langle \xi^2(x) \rangle \equiv R_{\xi}(0), \quad (3.6)$$

позволяющая оценить верхний предел погрешности $\max |\xi(x)|$. Измерению $f(x)$, кроме того, часто сопутствует экспериментальное определение изопланатической аппаратной функции прибора (спектрографа, интерферометра Фабри — Перо, зонда Ленгмюра и т. п.), т. е. ядра $K(x-y)$, что, естественно, сопряжено с появлением нового стационарного случайного процесса $\chi(x-y)$, также характеризуемого соответствующей корреляционной функцией или матрицей ошибок. Кстати, прием, нередко используемый экспериментаторами и состоящий в том, что ошибки из-за неточности ядра $K(x-y)$ сразу относят к правой части (3.4), включая их в $\xi(x)$, может приводить к совершенно неправильным результатам. Ниже мы еще вернемся к этой проблеме.

Учтем, что спектр некоррелированных ошибок

$$\tilde{\xi}(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) \exp(-i\omega x) dx \quad (3.7)$$

всегда содержит компоненты «белого шума», вследствие чего по теореме Бореля (3.7)

$$\tilde{\varphi}(\omega) = [\tilde{f}_0(\omega) + \tilde{\xi}(\omega)] \tilde{K}^{-1}(\omega) \quad (3.8)$$

($\tilde{f}_0(\omega)$ — фурье-образ «точной» правой части), а дисперсия решения приобретает вид

$$\sigma_{\varphi}^2 = \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{R}_{\xi}(\omega) |\tilde{K}(\omega)|^{-2} d\omega. \quad (3.9)$$

Поскольку при $\omega \rightarrow \infty$ спектры ограниченных функций $\tilde{f}_0(\omega)$ и $\tilde{K}(\omega)$ стремятся к нулю, а в противоположность им $\tilde{\xi}(\omega)$ и $\tilde{R}_{\xi}(\omega)$ — к конечному положительному пределу,

в решении неизбежно возникает неустойчивость, проявляющаяся как высокочастотная расходимость. Иными словами, в $\varphi(x)$ возникают осцилляции чисто шумового происхождения, причем их нарастание пойдет тем быстрее, чем выше уровень погрешности измерений, а также отношение характерных полуширин ядра и восстанавливаемой функции.

Отметим, что понятие «белый шум», давно используемое в задачах обработки и интерпретации экспериментальных данных, обычно трактуется как идеальная модель случайного процесса с широким спектром. На уровне физической строгости его часто определяют как производную от процесса броуновского движения, хотя иногда и добавляют, что это определение сугубо формальное, поскольку выборочные функции броуновского движения на самом деле нигде недифференцируемы. В этой связи уместно сделать еще одно замечание, касающееся интегральных уравнений 2-го рода, обычно расцениваемых на основании известных теорем Фредгольма как классически корректные. Для уравнения с разностным ядром вместо (3.8) следует записать

$$\tilde{\varphi}(\omega) = [\tilde{f}_0(\omega) + \tilde{\xi}(\omega)] [\tilde{K}(\omega) + C]^{-1}, \quad C \neq 0. \quad (3.10)$$

В условиях «белого шума» искажения решения, обязанные влиянию частот, которые лежат вблизи корней ω_k уравнения $\tilde{K}(\omega) + C = 0$, могут быть значительными. Вопросы повышения устойчивости решения в подобных ситуациях рассматривал Б. Алиев [4, 5].

Вернемся, однако, к уравнениям 1-го рода.

§ 2. Введение стабилизирующего фактора

Существует много вариантов подавления ложных высокочастотных составляющих решения уравнения (3.4), часто называемых в литературе методами фильтрации; довольно обстоятельный обзор этих методов содержится в [227]. Мы рассмотрим лишь простейший прием, популярный среди физиков-экспериментаторов. Пусть вместо $\varphi(x)$ искомой будет считаться некоторая «сглажен-

ная» функция:

$$\widehat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-x') \varphi(x') dx', \quad (3.11)$$

причем вид $g(x)$ подобран с учетом свойств фурье-образа этой функции: $\widetilde{g}(\omega)$. Например, можно положить $g(x) = c_1 x^{-1} \sin x$, откуда $\widetilde{g}(\omega) = c_2 \text{Rect}(\omega/\omega_1)$, где c_1 и c_2 — константы. Тогда, согласно (2.8),

$$\widehat{\varphi}(x) = c_3 \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \widetilde{f}(\omega) \widetilde{K}^{-1}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega, \quad (3.12)$$

где граничную частоту ω_1 можно корректировать в соответствии с уровнем погрешностей измерений.

В работе [175], посвященной анализу диагностических схем исследования осесимметричной плазмы в условиях ее случайных поперечных перемещений, оказалось целесообразным использовать фурье-трансформанту $\widetilde{g}(\omega)$ с варьируемым параметром a :

$$\widetilde{g}(\omega) = g_0 \exp(-a|\omega|^2). \quad (3.13)$$

Там же было прослежено за процессом вуалирования деталей структуры функции $\varphi(x)$ в зависимости от a ; кроме того, в модельных экспериментах изучались различные формы функции Грина задачи.

Достоинства данного метода заключаются в его предельной простоте и большой гибкости; очень существенным обстоятельством является также легкость использования алгоритма быстрого преобразования Фурье и применимость к обработке больших двумерных массивов отсчетов изображения [227]. Его недостатки суть очевидные продолжения тех же достоинств: они связаны с возможностью появления трудно контролируемых артефактов. В современных диагностических комплексах доля субъективизма при выборе $g(x)$ может быть уменьшена использованием диалоговых режимов [35], а также сочетанием математической фильтрации с приборной аподизацией [306].

Довольно естественным развитием идеи стабилизирующего фактора является такая параметризация $\widetilde{g}(\omega, a)$,

при которой оператор

$$R[f, a] = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \tilde{K}^{-1}(\omega) \tilde{g}(\omega, a) \exp(ix\omega) d\omega \quad (3.14)$$

оказался бы регуляризирующим в современном смысле этого понятия (см. гл. 6 и далее). Такой подход детально исследовался в работах В. Я. Арсенина с сотрудниками [10, 13]. В частности, показано, что функция $\tilde{g}(\omega, a)$ должна удовлетворять следующим условиям:

а) $\tilde{g}(\omega, a)$ определена в области $-\infty < \omega < \infty$, $a \geq 0$;

б) для всех $a \geq 0$ и $\omega : 0 \leq \tilde{g}(\omega, a) \leq 1$, $\tilde{g}(\omega, 0) \equiv 1$;

в) для всякого $a > 0$ $\tilde{g}(\omega, a)$ — чётная функция по ω , принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$;

г) для всякого $a > 0$ $\tilde{g}(\omega, a) \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow \infty$;

д) при $a \rightarrow 0$ $\tilde{g}(\omega, a) \rightarrow 1$, не убывая;

е) для всякого $a > 0$ $\tilde{g}(\omega, a) K^{-1}(\omega) \in L_2(-\infty, \infty)$;

ж) для всякого $\omega \neq 0$ $\tilde{g}(\omega, a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$. Этим условиям отвечает, например, стабилизирующий фактор

$$\tilde{g}(\omega, a) = |\tilde{K}(\omega)|^2 [|\tilde{K}(\omega)|^2 + aQ(\omega)]^{-1}, \quad (3.15)$$

где $Q(\omega)$ — заданная неотрицательная чётная функция, кусочно-непрерывная на любом конечном отрезке оси частот, причем $Q(0) \geq 0$, $Q(\omega \neq 0) > 0$ и при достаточно больших значениях $|\omega|$:

$$Q(\omega) \geq C > 0. \quad (3.16)$$

§ 3. Разложение спектра сигнала по системе функций с двойной ортогональностью

Проблему восстановления $f(x)$ из (3.4) можно трактовать с позиций экстраполяции спектра $\tilde{f}(\omega)$ за пределы полосы пропускания реального измерительного прибора. Действительно, осуществление такой экстраполяции означало бы повышение разрешающей способности прибора и в пределе — редукцию к идеальному анализатору спектра. Этот подход, по-видимому, ведет свое начало от работы Гарриса [298].

В данном случае удобно использовать следующую априорную информацию о сигнале $\varphi(x)$: функция $\varphi(x)$ кусочно-непрерывна, финитна в некотором интервале $(-b, b)$ и интегрируема в нем. Тогда в силу известной теоремы Винера — Пэли [39] фурье-образ финитной функции $\varphi(x)$ может быть продолжен на всю комплексную плоскость $\Omega = \omega + i\gamma$ как целая функция $\tilde{\varphi}(\Omega)$ конечной степени.

Эффективный метод аналитического продолжения спектра состоит в разложении по системе функций с двойной ортогональностью $\psi_m(\omega)$, например сфероидальных [229]. При этом

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \psi_m(\omega), \quad \alpha_m = \lambda_m^{-1} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \tilde{\varphi}(\omega) \psi_m(\omega) d\omega. \quad (3.17)$$

В (3.17) предполагается, что $\tilde{K}(\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_1$, λ_m — табулированные собственные значения сфероидальных функций. Таким образом, в силу двойной ортогональности системы $\psi_m(\omega)$ разложение $\tilde{\varphi}(\omega)$ существует на всем частотном интервале, в то время как коэффициенты α_m вычисляются по конечному интервалу: $-\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1$. Поскольку система $\psi_m(\omega)$ полна, ряд $\tilde{\varphi}(\omega)$ сходится, т. е. налицо аналитически продолженный спектр сигнала.

Возвращаясь к $\varphi(x)$ от ее фурье-трансформанты, находим

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(\omega) \exp(-ix\omega) d\omega. \quad (3.18)$$

Несложные выкладки [35] дают

$$\varphi(x) = \begin{cases} (2\pi\omega_1/b)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m i^{-m} \lambda_m^{-1/2} \psi_m(x\omega_1/b), & |x| \leq b, \\ 0, & |x| > b. \end{cases} \quad (3.19)$$

Поскольку члены ряда в (3.19) неизбежно отягощены погрешностями, нужно принимать специальные меры как для корректного «обрыва» ряда, так и для последовательного учета отношения сигнал/шум. Если это сделано, то результаты восстановления $\varphi(x)$ оказываются достаточно хорошими [348].

§ 4. Итерационная схема Ван-Циттерта

Среди множества итерационных методов, употребляемых практиками при обработке результатов эксперимента, особой популярностью до сих пор пользуется метод, предложенный Ван-Циттертом и развитый в дальнейшем Ван-Циттертом и Бургером (ссылки в обзорах [192, 227]). Примечательно, что ни полувековой возраст, ни жесточайшая конкуренция со стороны более рафинированных подходов не снизили к нему интереса [227]; в течение длительного времени применительно к этому методу конструировались даже специальные интеграторы (интегральные корректоры).

Идея метода исключительно проста: алгоритм можно охарактеризовать такой последовательностью операций (фактически реализующей разложение обратного оператора в ряд Неймана):

1) в качестве нулевого приближения берем $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$;

2) $f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) \otimes K(x)$, где \otimes — символ операции свертки;

3) $\varphi^{(n+1)}(x) = \varphi^{(n)}(x) + [f(x) - f^{(n)}(x)]$;

4) $n \rightarrow (n + 1)$;

5) переходим к п. 2.

Если было выполнено всего N итераций, то, как показывает несложный расчет,

$$\varphi(x) \simeq \varphi^{(N)}(x) = (N + 1)f(x) + \sum_{m=1}^N C_{N+1}^{m+1} (-1)^m \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(y) f(x - y) dy, \quad (3.20)$$

где $K^{(1)}(y) = K(y)$, $K^{(N)}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N-1)}(z) K(y - z) dz$,

C_N^m — символ сочетаний.

Удобство метода состоит прежде всего в том, что для каждой конкретной установки и выбранного порядка приближения члены

$$\sum_{m=1}^N C_{N+1}^{m+1} (-1)^m K^{(N)}(y)$$

легко рассчитать заранее. Выбор N (именно это и является неявной регуляризующей операцией) исследователь

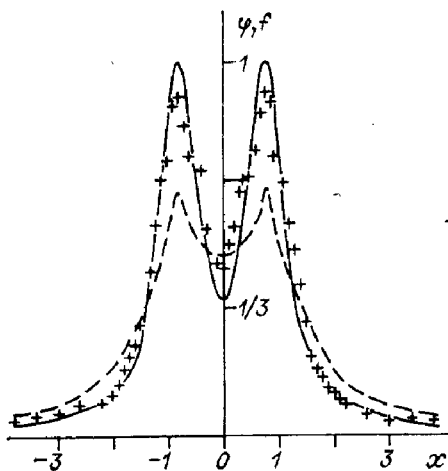


Рис. 2. Восстановление сложного спектрального профиля по схеме Ван-Циттерта.

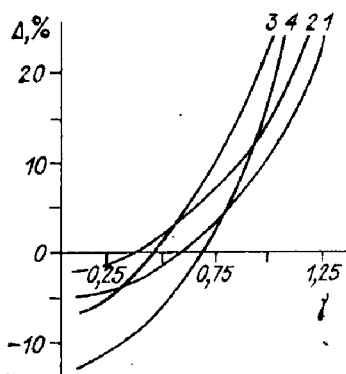


Рис. 3. Относительная ошибка восстановления параметров доплеровского контура от отношения γ .

чаще всего осуществляет полуинтуитивно, руководствуясь соображениями о реальной либо фиктивной природе тех деталей решения $\varphi(x)$, которые возникают по мере роста числа итераций. В качестве типичного примера из области диагностики плазмы сошлемся на статью [1], авторы которой определяли электронную плотность в труднодоступной области между анодом и соплом промежуточного электрода дуоплазмотрона.

В работе [187] производился численный анализ схемы Ван-Циттерта; он включал в себя вариацию форм $K(x)$ и $\varphi(x)$, отношение ширин $\gamma = (\Delta K)_{1/2} / (\Delta \varphi)_{1/2}$ этих распределений, дисперсии нормально распределенной ошибки s^2 , «набрасываемой» на вычисляемую свертку f , а также числа итераций N . Отдельные результаты показаны на рис. 2 и 3. На рис. 2 демонстрируется восстановление профиля с центральным провалом (типа самообращения в условиях неоднородной оптически плотной плазмы), формирующегося при частичном наложении крыльев двух близких лоренцевых контуров. Сплошная линия — точный профиль φ , штриховая — свертка f , крестики — результат редукции, $\gamma = 1$, $N = 4$, коэффициент вариации погрешности $\beta = 1,5\%$, форма ядра — гауссова. На рис. 3 показана зависимость относительной ошибки вос-

становления Δ различных характеристик контура доплеровской формы от отношения γ (по-прежнему $\beta = 1,5\%$, $N = 4$). При этом кривая 1 относится к ошибке восстановления максимального (пикового) значения интенсивности в линии, а кривые 2, 3 и 4 — соответственно к ошибке при восстановлении спектральных интервалов между точками контура на высотах 0,2; 0,5 и 0,7 от максимума.

Роль формы ядра $K(x)$ и поведение алгоритма с изменением числа итераций N нетрудно выяснить, переходя к фурье-образам соответствующих функций. Простые выкладки дают

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^{(N)}(\omega) &= [\tilde{f}(\omega)/\tilde{K}(\omega)] [1 - (1 - \tilde{K}(\omega))^{N+1}], \\ \tilde{\varphi}^{(N+1)}(\omega) &= \tilde{f}(\omega) + \tilde{\varphi}^{(N)}(\omega) [1 - \tilde{K}(\omega)].\end{aligned}\quad (3.21)$$

Легко видеть, что, беря конечное значение N , получаем, согласно первой формуле (3.21), обычную инверсную фильтрацию со сглаживанием (аподизацией) [227]. Если $\tilde{K}(\omega)$ мало, имеем просто линейное усиление наблюдаемого сигнала

$$\tilde{\varphi}^{(N)}(\omega) \rightarrow (N + 1)\tilde{f}(\omega), \quad (3.22)$$

а переходя к пределу $\tilde{K}(\omega) \rightarrow 0$, находим, что на соответствующих частотах

$$\tilde{\varphi}^{(N)}(\omega) \rightarrow (N + 1)\tilde{\xi}(\omega), \quad (3.23)$$

где $\tilde{\xi}(\omega)$ определяется по формуле (3.7). Наконец, следует заметить, что при $N \rightarrow \infty$ и $\tilde{K}(\omega)$, отличном от нуля, предел инверсной фильтрации $\tilde{f}(\omega)/\tilde{K}(\omega)$ достигается лишь, если $|1 - \tilde{K}(\omega)| < 1$. В диагностических экспериментах возможны случаи $\tilde{K}(\omega) < 0$ (сдвиг, дефокусировка изображения и т. п.), и тогда налицо расходимость алгоритма.

Модельные эксперименты, проведенные в [188], дали основание считать, что применение схемы Ван-Циттерта целесообразно, если: а) $\gamma \leq 1$, б) $\beta \leq 2-3\%$, в) $N \leq 5 \div 7$, г) исследуются уширения профилей не слишком сложной формы на уровнях $\leq 0,5$ от пикового значения интенсивности. С уменьшением γ число необходимых итераций быстро сокращается; например, при $\alpha = 1/3$ приемлемые результаты получаются уже при одной-двух итерациях.

§ 5. Модернизированные итерационные схемы

Корреляция между номером последней итерации и ожидаемым характером решения — не единственная возможность внесения априорной информации в алгоритм Ван-Циттерта. Сравнительно недавно интересную модификацию этого алгоритма предложил Жансон [307]. Она определяется такой последовательностью операций:

- 1) $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$;
- 2) $f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) \otimes K(x)$;
- 3) $\varphi^{(n+1)}(x) = \varphi^{(n)}(x) + J(x)[f(x) - f^{(n)}(x)]$;
- 4) $n \rightarrow (n + 1)$;
- 5) переход к п. 2.

Отличие от схемы Ван-Циттерта состоит в изменении п. 3, где введен некоторый «коэффициент релаксации» $J(x)$, зависящий от $\varphi^{(n)}(x)$. Простейшая форма $J(x)$, предложенная Жансоном, такова:

$$J(x) = C[1 - 2|\varphi^{(n)}(x) - 1/2|], \quad (3.24)$$

C — константа. Ясно, что $J(x) \rightarrow 0$, когда $\varphi^{(n)}(x)$ стремится к нулю или к единице; иными словами, решение заключено в пределах $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Разумеется, вместо единицы можно взять любую другую положительную константу; элементарным образом изменив (3.24): интервал $0 \leq \varphi \leq 1$ соответствовал у Жансона задаче обработки абсорбционных спектров. Более интересно другое обобщение:

$$J(x) = C[1 - 2(B(x) - A(x))^{-1}|\varphi^{(n)}(x) - 2^{-1}(A(x) + B(x))|], \quad (3.25)$$

т. е. если экспериментатор может указать некоторые ограничивающие кривые $A(x)$ и $B(x)$, алгоритм гарантирует, что решение $\varphi(x)$ не выйдет из соответствующего «коридора». В работе [307] приводятся экспериментальные иллюстрации, убедительно доказывающие преимущества нелинейного алгоритма Жансона над обычной линейной схемой Ван-Циттерта, где $J(x) = 1$.

Рассмотрим теперь другой способ модернизации схемы Ван-Циттерта. Вместо формул (3.20) и (3.21), можно после простых преобразований записать следующее «синтезированное» выражение:

$$\varphi(x) = f(x) + (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{K}^{-1}(\omega) - 1] \tilde{f}(\omega) \exp(ix\omega) d\omega. \quad (3.26)$$

Ранее приведенные формулы для $\varphi(x)$ соответствуют, таким образом, разложению обратного оператора задачи в ряд Неймана. Однако возможно разложение и в другие сходящиеся функциональные ряды, т. е.

$$[\tilde{K}^{-1}(\omega) - 1] = \sum_n a_n U(\omega). \quad (3.27)$$

Пусть, например, $U_n(\omega) = \omega^n$. Тогда, используя известное выражение производной от функции через ее фурье-образ:

$$d^n f(x)/dx^n = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^n \tilde{f}(\omega) \exp(ix\omega) d\omega, \quad (3.28)$$

имеем

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_n (i)^{-n} a_n [d^n f(x)/dx^n]. \quad (3.29)$$

Здесь, как и в (3.1), коэффициенты a_n определяются структурой функции Грина задачи. В частности, если

$$\begin{aligned} K(x) &= (\beta/2) \exp(-\beta|x|), \\ \tilde{K}(\omega) &= [1 + (\omega/\beta)^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

получим решение

$$\varphi(x) = f(x) - \beta^{-2} [d^2 f(x)/dx^2], \quad (3.31)$$

известное как решение Эддингтона. В задачах по реставрации изображения нередко используется двумерный аналог (3.31), часто называемый формулой Коважного — Джозефа [35]:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - \kappa [\partial^2 f(x, y)/\partial x^2 + \partial^2 f(x, y)/\partial y^2]. \quad (3.32)$$

В диагностических приложениях (например, использующих методы голографической интерферометрии) часто возникает проблема контрастирования, приближенным способом решения которой является суперпозиция размытого (нерезкого) изображения $f(x, y)$ и его контурной копии, находимой путем воздействия на $f(x, y)$ оператора Лапла-

са с некоторым «весом» κ [155]. Именно такой процедуре и соответствует формула Коважного — Джозефа.

Практический интерес может также представить случай прямоугольного ядра:

$$K(x) = \begin{cases} (4\beta)^{-1}, & |x| \leq 2\beta, \\ 0, & |x| > 2\beta. \end{cases} \quad (3.33)$$

Тогда однократным дифференцированием исходного уравнения (3.4) получаем рекуррентное соотношение:

$$\varphi(x + 2\beta) = \varphi(x - 2\beta) + 4\beta [df(x)/dx]. \quad (3.34)$$

Если известно значение $\varphi(x_0)$ и применена регуляризация при вычислении первой производной $f(x)$, то может быть вычислен дискретный ряд значений $\varphi(x_0 + 4\beta)$, $\varphi(x_0 + 8\beta)$, ...

Наконец, если в разложении (3.27) выбрать $U_n(\omega) = \sin_n(c\omega/2)$, то вместо (3.29) получится удобное для расчетов на ЭВМ выражение в конечных разностях

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_n (2i)^{-n} a_n \Delta_c^n f(x). \quad (3.35)$$

В заключение этого раздела приведем без доказательства важную в прикладном отношении теорему [228] относительно сходимости последовательных приближений.

Т е о р е м а. Пусть $K(x, y)$ — симметричное, квадратично суммируемое положительно определенное ядро и пусть уравнение

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad f(x) \in L_2[a, b] \quad (3.36)$$

разрешимо. Тогда последовательность $\{\varphi^n(x)\}$, определяемая рекуррентным соотношением

$$\varphi^n(x) = \varphi^{(n-1)}(x) + \lambda \left[f(x) - \int_a^b K(x, y) \varphi^{(n-1)}(y) dy \right], \quad (3.37)$$

где $\varphi^{(0)}(x) \in L_2[a, b]$, $0 < \lambda < 2\lambda_{\min}$, причем λ_{\min} — наименьшее характеристическое число ядра $K(x, y)$, сходится в среднем к решению уравнения (3.36).

Эта теорема часто бывает полезной при обосновании тех или иных итерационных схем, связанных с различными способами внесения в алгоритм априорной информа-

ции о решении. Исследование сходимости метода итераций на конкретных примерах провели недавно Хилл и Юп [300]; в частности, в этой работе выявлены такие классы разностных ядер $K(x - y)$, для которых сходимость либо отсутствует, либо не соответствует практическим запросам.

§ 6. Проекционная схема Танабы — Хуанга

Получивший известность сравнительно недавно алгоритм, разработанный Танабой и Хуангом с сотрудниками [304], оказался очень удобным во многих отношениях. Его идея сводится к следующему.

Перейдем от исходного операторного уравнения $K\varphi = f$ к его алгебраизованной версии

$$\sum_{i=1}^N K_{mi}\varphi_i = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.38)$$

Будем рассматривать $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ как вектор в N -мерном пространстве, а каждое из M уравнений в (3.38) — как гиперплоскость. Пусть выбрано некое начальное приближение $\varphi^{(0)}$. Следующее приближенное решение $\varphi^{(1)}$ найдется как проекция $\varphi^{(0)}$ на первую гиперплоскость

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} - [(\varphi^{(0)} \cdot \mathbf{K}_1 - f_1)\mathbf{K}_1] / \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_1, \quad (3.39)$$

где $\mathbf{K}_1 = (K_{11}, K_{12}, \dots, K_{1N})$, а скалярное произведение обозначено точкой. Затем вычислим проекцию $\varphi^{(2)}$, используя в соответствии с (3.39) векторы $\varphi^{(1)}$, $\mathbf{K}_2 = (K_{21}, K_{22}, \dots, K_{2N})$ и т. д., пока не дойдем до $\varphi^{(M)}$. Тем самым первый цикл итераций закончен. Далее повторяем весь цикл, исходя из $\varphi^{(M)}$, получив в результате $\varphi^{(2M)}$ и т. д.

Танабой и Хуангом показано:

а) векторная последовательность $\varphi^{(0)}, \varphi^{(M)}, \varphi^{(2M)}, \varphi^{(3M)}, \dots$ всегда сходится для любых N, M и K_{mi} , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(nM)} = \varphi, \quad (3.40)$$

если система уравнений (3.38) имеет единственное решение;

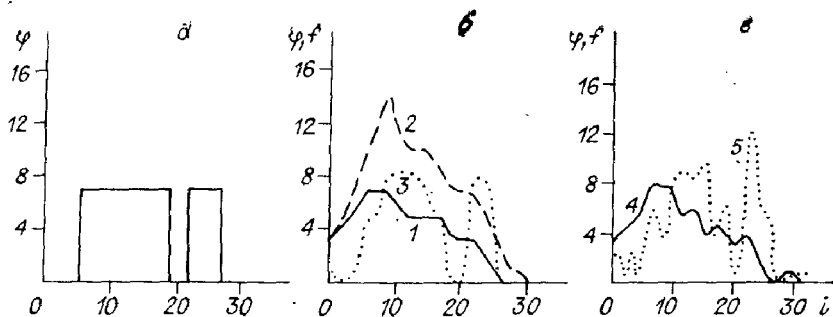


Рис. 4. Иллюстрация возможностей проекционной схемы Танабы — Хуанга.

а, б, в — восстановление сигналов с различными помехами; 1 — искаженный сигнал (в отсутствие случайной помехи), 2 — восстановление после одного цикла итераций, 3 — восстановление после 10 циклов итераций, 4 — искаженный сигнал со случайной помехой, 5 — восстановление после 10 циклов итераций.

б) если система (3.38) имеет бесконечное множество решений, то Φ будет решением, минимизирующим норму невязки

$$\|\Phi - \Phi^{(0)}\| = \left\{ \sum_{i=1}^N (\varphi_i - \varphi_i^{(0)})^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.41)$$

Иными словами, даже при бесконечном множестве решений мы можем надеяться на получение приемлемого, физически разумного решения, если начнем с хорошего приближения $\Phi^{(0)}$;

в) проекционный метод допускает введение самой разнообразной информации о решении: ограниченности, неотрицательности, монотонности и т. п. Например, условие $\varphi_i \geq 0$ учитывается простым приравнением нулю любых отрицательных составляющих $\Phi^{(n)}$ перед нахождением следующей проекции.

На рис. 4 даны примеры решения модельной обратной задачи с использованием схемы Танабы — Хуанга. Исходным был сигнал φ в виде двух прямоугольников (а); этот сигнал сильно искажался оператором K в условиях отсутствия (б) и присутствия (в) случайной помехи. Последняя была «белым шумом» с нулевым средним, равномерным распределением и характеризовалась стандартным отклонением $\sigma = 0,5$ (этому соответствовало отношение пиковый сигнал/шум порядка 23 дБ). После 10 циклов итераций в обоих случаях оба компонента сигнала

разделялись, хотя их форма (особенно при наличии помехи) оставалась искаженной. Нужно заметить, что использованная в этом расчете априорная информация была незначительной: $\varphi \geq 0$. В последующих работах Хуанга с соавторами даны примеры существенно лучшего восстановления проекционным методом как одномерных сигналов, так и двумерных изображений, причем сделаны оценки характерных времен решения такого рода задач на ЭВМ с параметрами, примерно соответствующими отечественной машине БЭСМ-6. Оказывается, что указанные времена порядка 10с. Это позволяет считать схему Та-набы — Хуанга вполне перспективной с точки зрения задач диагностики плазмы.

Г Л А В А 4

МЕТОДЫ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ

Перейдем к краткому описанию методов, в основе которых лежит идея искусственного изменения оператора задачи. Это изменение должно отвечать определенным требованиям, с одной стороны, малости создаваемых таким образом искажений, а с другой — внесения достаточной априорной информации, чтобы задача стала математически корректной. В литературе нет четкого разграничения классов этих методов, однако за их определенной частью, относящейся в основном к более ранней стадии исследования неустойчивых задач, довольно прочно закрепилось название «методы квазиобращения».

В качестве типичного примера назовем уже упоминавшийся в гл. 1 метод, предложенный Нейманом и Рихтмайером [377], который основан на включении в уравнение члена с псевдовязкостью. Благодаря этому гиперболическая задача превращается в параболическую, что гарантирует устойчивость решения и устраняет разрывы. Весьма важная с точки зрения приложений (газодинамика, физика плазмы) модификация этого метода принадлежит Лаксу и Вендрофу [321]. Упомянем здесь классическую статью Куранта [276] по обоснованию способа штрафных функций в вариационных задачах, работы Кона и

Ниренберга [312], а также Олейник [153] по аппроксимации неэллиптической задачи семейством эллиптических задач, исследования Лионса по расширению границ применимости метода фиктивных областей, когда деформируется не только сам оператор, но и область его определения.

Остановимся подробнее на методах квазиобращения, непосредственно связанных с постановками задач, возникающих в диагностике плазмы.

§ 1. Метод введения единичного оператора

Для пояснения существа этого метода напомним принадлежащее Тихонову обобщение классического (по Адамару) понятия корректности обратной задачи

$$K\varphi = f, \quad \varphi \in \Phi, \quad f \in F. \quad (4.1)$$

Будем называть задачу условно корректной, если:

- а) априори известно, что решение существует для некоторого класса данных из F и принадлежит заданному множеству (множеству корректности) M : $\overline{\varphi \in M} \neq \emptyset$;
- б) в классе M решение единственно;
- в) бесконечно малым вариациям f , не выводящим решение за пределы M , соответствуют бесконечно малые вариации решения.

Соответствующий анализ показывает, что множество корректности M , о котором идет речь в пунктах а), б) и в), как правило, является компактом.

Следуя М. М. Лаврентьеву [117], можно ввести в рассмотрение такой вполне непрерывный оператор L , что множество корректности M окажется множеством функций u , для которых справедливы соотношения:

$$Lv = u, \quad \|v\| \leq 1, \quad \|L\| \leq 1. \quad (4.2)$$

Если оператор K положителен, а K и L перестановочны, то вместо (4.1) нужно решать уравнение

$$K\varphi + \alpha\varphi = f, \quad (4.3)$$

$$\text{т. е. } \varphi = (K + \alpha E)^{-1}f, \quad (4.4)$$

где E — единичный оператор, а α — некоторый малый параметр (параметр регуляризации). Смысл введения члена αE в (4.4) легко понять: в силу известной теоремы

Фредгольма [106] спектр собственных значений линейного оператора K чаще всего сгущается к нулю, вследствие чего оператор K^{-1} либо не существует, либо неограничен. Слагаемое αE приводит к сдвигу спектра на величину α , так что решение становится устойчивым и в то же время остается не слишком сильно искаженным, если параметр α мал.

Если коммутируют не K и L , а K^*K и L (K может быть неположительным), то вместо (4.4) имеет место выражение

$$\varphi = (K^*K + \alpha E)^{-1}K^*f. \quad (4.5)$$

Как в предыдущем, так и в данном случае знания явного вида оператора L собственно для решения задачи по формулам (4.4), (4.5) не требуется: информация об L необходима лишь для проверки коммутационных условий и в ряде случаев она может быть довольно ограниченной [147]. Более сложная ситуация возникает, если условие положительности выполняется только для оператора KL или K и L произвольны. В первом случае

$$\varphi = L(KL + \alpha E)^{-1}f, \quad (4.6)$$

во втором

$$\varphi = L[(KL)^*(KL) + \alpha^2 E]^{-1}(KL)^*f. \quad (4.7)$$

Ясно, что с практической точки зрения формулы (4.4) и (4.5) предпочтительнее, нежели (4.6) или (4.7).

Если (4.1) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, причем аргументы x и y ядра имеют одинаковый физический смысл (время, частота, координата и т. п.), то полезными могут оказаться некоторые итерационные схемы, основанные на идее введения единичного оператора [118].

Пусть прежде всего $\|K\| \leq 1$. При этом: а) если K — самосопряженный положительный оператор, коммутирующий с L , то

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x) + f(x) - \int_a^b K(x, y) \varphi^{(n-1)}(y) dy, \quad (4.8)$$

$$\varphi^{(0)}(x) = f(x);$$

б) если K — произвольный самосопряженный оператор, коммутирующий с L , то

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x) + f(x) - (-1)^{(n-1)} \int_a^b K(x, y) \varphi^{(n-1)}(y) dy; \quad (4.9)$$

в) если K — произвольный оператор и с L коммутирует K^*K , то

$$\varphi^{(n)} = \varphi^{(n-1)} - [K^*K\varphi^{(n-1)} - K^*f]. \quad (4.10)$$

Можно было бы привести и более общие выражения для $\varphi^{(n)}$, но в них уже явным образом входит оператор L , и потому они в практическом плане менее интересны.

Укажем еще на метод Бакушинского [15], который с идейной точки зрения близок к схемам, разработанным М. М. Лаврентьевым, и в известной степени дополняет их. В этом методе также рассматривается несколько типов оператора K . В частности, если K — положительный, имеет полную систему собственных функций $\{\psi_m(x)\}$ и набор вещественных неотрицательных собственных значений μ_m , то для обеспечения устойчивости и сходимости решения берется уравнение Лаврентьева (4.3), а само решение выражается формулой ($\alpha > 0$)

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \psi_m(x) / (\mu_m + \alpha), \quad (4.11)$$

где $f_m = (f, \psi_m)$. Данная формула, очевидно, обобщает классический результат теории интегральных уравнений [106], которому соответствует $\alpha = 0$. Для произвольного, но самосопряженного оператора K приходится иметь дело с полной системой комплексных собственных функций и с набором вещественных собственных значений. Вместо (4.3) необходимо ввести вспомогательное уравнение

$$K\varphi_\alpha + i\alpha\varphi_\alpha = f \quad (4.12)$$

и записать решение в виде

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \psi_m(x) / (\mu_m + i\alpha). \quad (4.13)$$

Могут быть получены и более общие, но менее удобные в прикладном отношении формулы (разложения по собственным функциям ядра Шмидта и т. п.).

Упомянув все эти алгоритмы, мы не останавливаемся на важных вопросах о выборе параметра α , функциях корректности, введенных М. М. Лаврентьевым [118], процедурах, ограничивающих число итераций, скорости сходимости рядов и т. п., поскольку перечисленные вопросы, а также многочисленные модельные иллюстрации, связанные с квазиобращением через единичный оператор, достаточно полно разобраны в справочном пособии [38], а также в обзоре В. А. Морозова [147]. Коснемся кратко лишь работы И. Н. Свентицкой [197], в которой отчетливо продемонстрирована возможность применения несколько модифицированного алгоритма квазиобращения к спектроскопическому эксперименту.

В данном случае стояла задача устранения аппаратурных искажений спектров, снятых с помощью щелевого диссектора, предназначенного для диагностических измерений с высоким разрешением во времени. Эта задача сводилась к деконволюции свертки вида

$$\int_{-H}^H K(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (4.14)$$

причем в простейшем случае функции φ , f и K считались четными. Алгоритм Лаврентьева в виде (4.3) удобно сочетать с проекционным методом Галеркина, т. е. строить решение $\varphi^N(x)$ как проекцию на N -мерное подпространство, образуемое элементами полной ортонормальной на $[-H, H]$ системы функций $\{\psi_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Таким образом,

$$\varphi^N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(x), \quad f^N(x) = \sum_{n=0}^N c_n \psi_n(x), \quad (4.15)$$

где

$$\psi_n(x) = H^{-1/2} \cos(\pi n x H^{-1}). \quad (4.16)$$

Разностное ядро также очевидным образом разлагается в ряд Фурье:

$$K(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n H^{-1/2} \cos[\pi n (x-y) H^{-1}]. \quad (4.17)$$

В результате вместо (3.14) имеем уравнение

$$K\varphi^N + \alpha\varphi^N = f^N, \quad (4.18)$$

$$\text{причем } a_n = c_n / (b_n + \alpha). \quad (4.19)$$

Подчеркнем, что коэффициенты Фурье c_n (а в некоторых случаях и b_n) отягощены погрешностями. Свентицкая [197] разработала специальный алгоритм минимизации некоторого функционала, позволяющий выбирать оптимальные значения числа проекций N как функции числа узлов $(M + 1)$ в формулах приближенного интегрирования для c_n и b_n , а также параметра регуляризации α . Кроме того, при реализации алгоритма использовались некоторые дополнительные приемы, уточняющие решение и повышающие его устойчивость: суммирование рядов по Фейеру в области оптимального N , усреднение по шумовым характеристикам и т. п. Наконец, можно показать, что алгоритм легко обобщается на случай произвольного спектра.

§ 2. Метод введения дифференциального оператора

Существует, вообще говоря, бесконечно много реализаций данного метода, поскольку для одной и той же некорректной задачи можно строить различные операторы квазиобращения. Достоинством метода является то обстоятельство, что при выборе структуры оператора, а также числовых значений некоторых параметров задачи часто удается использовать физические соображения об искомом решении, а не только более или менее формальные условия чисто математического характера.

Значительное число диагностических задач может быть либо непосредственно сформулировано с помощью линейных или нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, либо сведено к таким уравнениям после некоторых преобразований. В последнем случае важную роль играет своеобразный «принцип соответствия» постановок многих прикладных задач в интегральной и дифференциальной форме. Например, только что рассмотренная задача об учете аппаратных искажений спектра, если аппаратная функция прибора мало отличается от дисперсионной, легко сводится к задаче аналитического продолжения (теории функций комплексного переменного), когда решается уравнение Лапласа на полуплоскости. Другой пример — редукция к идеальному прибору, которому в реальной диагностической ситуации соответ-

ствуёт неразностное «дважды осциллирующее» ядро:

$$K(x, y) = \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot \sin ny \cdot \exp(-n^2 t). \quad (4.20)$$

Тогда интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^{\pi} K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (4.21)$$

отвечает задача Коши для уравнения диффузии (теплопроводности) с обратным ходом времени:

$$(\partial/\partial t - \partial^2/\partial x^2)u = 0 \quad (4.22)$$

При этом $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t \leq T$, $u(0, \cdot) = u(\pi, \cdot) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(x, T) = \text{const} \cdot \sin nx$.

Решение некорректной задачи (4.22) удобно получить квазиобращением с введением дифференциального оператора. Оператор общего вида $D = (\partial/\partial t - \Delta)$ нужно заменить, например, следующим: $D \rightarrow D_{\alpha}$, где

$$D_{\alpha} = \partial/\partial t - \Delta - \alpha \Delta^2, \quad (4.23)$$

α — параметр регуляризации. Доказательство корректности задачи с оператором D_{α} и соответствующая техника решения имеются в монографии [124]. В работах [7, 124] приведено большое количество алгоритмов квазиобращения с введением дифференциальных операторов, а также конкретных примеров, многие из которых представляют интерес для физики плазмы.

В связи с особой важностью для диагностических приложений, описывающих перенос излучения в линейчатом спектре, остановимся подробнее на одном из способов, дающем удобную возможность воспользоваться методом квазиобращения [178].

Обозначим через u нормированную на больцмановское значение плотность возбужденных атомов. Пусть далее q — радиационный поток, направленный вдоль орта Ω , I_{ν} — спектральная интенсивность, $\kappa(\nu)$ — коэффициент поглощения, $B(\nu_0, T)$ — функция Планка, рассчитанная для центра рассматриваемой линии ν_0 и температуры T , $\gamma = (g_1/g_2)(h\nu_0 N)^{-1} \exp(h\nu_0/kT)$, g_1, g_2 — статистические веса уровней, N — плотность атомов-абсорбентов. Исход-

ной является зацепляющаяся система кинетических уравнений вида:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= -\gamma \nabla \mathbf{q}; \\ \mathbf{q} &= \int_0^{\infty} dv \int_{4\pi} I_v \Omega d\Omega; \\ \Omega \nabla I_v &= \kappa(v) [uB(v_0, T) - I_v]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Задача сводится к отысканию u как функции координат и времени; расчет чисто радиационных характеристик (I_v , \mathbf{q}) и постановка тех или иных частных задач диагностики являются уже следующими этапами.

Для симметричного профиля $\kappa(v)$ частотный интервал $[v_0, +\infty]$ можно условно разделить на три участка: $[v_0, v_1]$, соответствующий короткопробежным фотонам и области применимости приближения Росселанда [254]; $[v_1, v_2]$, соответствующий среднепробежным фотонам, где необходим последовательный кинетический подход к задаче; $[v_2, \infty]$, соответствующий длиннопробежным фотонам и области применимости приближения Планка [254].

Тогда первое из уравнений системы (4.24) запишется в виде

$$\partial u / \partial t = -\gamma (\nabla \mathbf{q}_R + \nabla \mathbf{q}_k + \nabla \mathbf{q}_P), \quad (4.25)$$

где индексы у дивергентных членов отвечают указанным участкам. Легко показать, что учет только первого и третьего слагаемых в правой части (4.25) означал бы законность фоккер-планковского разложения функции $u(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})$ по степеням $\boldsymbol{\rho}$, где \mathbf{r} — точка испускания, а $(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})$ — точка поглощения фотона. Отсюда следует, что если устремить интервал $[v_1, v_2]$ к нулю, т. е. так расширить области приближений Росселанда и Планка, чтобы точки v_1 и v_2 совпадали ($v_1 = v_2 = v^*$), то этой операции должна соответствовать возможность аналогичного разложения $u(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho})$ и в интегральном члене полного кинетического уравнения. Можно показать [178], что, определяя v^* из условия $\kappa(v^*l) \simeq 1$, где l — характерный размер системы, мы удовлетворяем указанной возможности.

После этого остается лишь записать дивергентные члены, входящие в (4.25), в приближениях Планка

($uB \gg I_\nu$) и Росселанда ($uB \simeq I_\nu$). Имеем

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{q}_P &= a_1 u, \quad \nabla \mathbf{q}_R = -b_1 \nabla u, \\ a_1 &= 8\pi B \int_{\nu^*}^{\infty} \kappa d\nu, \quad b_1 = (8\pi B/3) \int_{\nu_0}^{\nu^*} \kappa^{-1} d\nu. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Обозначая $a = a_1 \gamma$, $b = b_1 \gamma$, приходим к дифференциальному уравнению для функции u :

$$\partial u / \partial t = -au + b \Delta u. \quad (4.27)$$

Анализ показывает, что для типичных в спектроскопии плазмы профилей $\kappa(\nu)$ замена решения системы (4.24) решением уравнения (4.27) не только не вносит на практике систематических погрешностей, превышающих $\sim 10\%$, но и дает значительное упрощение задачи. Это особенно важно в расчетах радиационных потерь, когда необходимо принимать во внимание большое число линий и континуум.

Существует обширный класс граничных обратных задач радиационного переноса в плазме, вполне аналогичных соответствующим традиционным задачам теплообмена [7], например краевая постановка, постановка в форме Коши и вариационная постановка; не менее интересны и ретроспективные задачи (с обратным ходом времени) [6]. Во всех этих случаях имеет место сильная неустойчивость решения, преодолеваемая на основе уравнения (4.27) и алгоритмов квазиобращения, например, в форме (4.23), причем наличие члена с производной нулевого порядка не является препятствием к применению алгоритма.

Интересно отметить такую модификацию метода, когда в уравнении (4.25) член $\nabla \mathbf{q}_R$ не отбрасывается за счет совмещения частот ν_1 и ν_2 , а рассчитывается как некоторое среднее двух значений, получаемых в приближениях Планка и Росселанда; при этом точность определения $u(\mathbf{r}, t)$ может быть повышена.

В заключение сделаем несколько общих замечаний, касающихся метода квазиобращения с введением дифференциального оператора.

1. Основная область приложения метода — решение необратимых эволюционных задач в ретроспективном варианте, задач управления системой, описываемой уравнениями в частных производных, граничных задач с из-

быточными данными на одной части границы и с недостаточными на остальной части.

2. Метод может быть реализован в абстрактных пространствах для эволюционных уравнений как параболического, так и непараболического типа; при этом наряду с линейными могут быть рассмотрены многие нелинейные задачи [124].

3. Исследование вопроса об устойчивости неявной разностной схемы для регуляризованного уравнения

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= -a^2(\partial^2 u / \partial x^2) - \alpha(\partial^4 u / \partial x^4), \\ u(0, t) &= u(1, t) = (\partial^2 / \partial x^2)u(0, t) = \\ &= (\partial^2 / \partial x^2)u(1, t) = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$x \in [0, 1], \quad 0 < t < T, \quad \alpha > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

приводит к следующим результатам [22]: схема в общем случае оказывается слабо устойчивой, а при некоторых ограничениях, наложенных на начальную функцию $\varphi(x)$ (отсутствие высокочастотных составляющих спектра), норма оператора шага в L_2 меньше 1, т. е. схема устойчива. Тамме [208] для решения многомерной эволюционной задачи предложил схему с расщепляющимся оператором и доказал ее устойчивость.

§ 3. Квазиобращение в постановке физического эксперимента

История физики богата примерами, когда талантливый экспериментатор, руководствуясь в основном интуитивными соображениями и некоторой априорной информацией о характере ожидаемого результата, выбирал из множества возможных вариантов именно такую схему опыта, которая обеспечивала устойчивое решение рассматриваемой задачи. Как правило, такой выбор сопряжен с изменением оператора задачи, которая тем самым становилась корректной по Адамару. Поэтому с известными оговорками подобные приемы также можно причислить к методам квазиобращения, понимаемым, конечно, в более широком смысле слова.

Проиллюстрируем сказанное всего одним примером. Рассмотрим эффект деполяризации флуоресценции газа

(или неравновесной плазмы), помещенного в слабое магнитное поле. Этот эффект открыл Ханле в 1924 г. Он сыграл исключительно важную роль в период становления и развития квантовой механики [152], а в последние годы, пережив как бы второе рождение, зарекомендовал себя как прецизионный инструмент исследования состояний атомов и молекул и тонких кинетических процессов, протекающих в газовых и плазменных системах, в том числе в лазерных средах [239].

Напомним прежде всего на примере интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (4.29)$$

одно простое следствие неустойчивости обратного оператора задачи. Если взять два решения уравнения (4.29) $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$, разность которых есть гармоническая функция

$$\varphi_2(y) - \varphi_1(y) = R \sin(\omega y), \quad (4.30)$$

то в метрике L_2 отношение уклонений решения и правой части (4.29) равно:

$$\begin{aligned} \kappa = & \left[\int_a^b |\varphi_2 - \varphi_1|^2 dy \right]^{1/2} \left[\int_c^d |f_2 - f_1|^2 dx \right]^{-1/2} = [\omega(b-a) - \\ & - \sin(b-a) \cos[\omega(b+a)]]^{1/2} \times \\ & \times \left[2\omega \int_c^d \left[\int_a^b K(x, y) \sin(\omega y) dy \right]^2 dx \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Неустойчивость задачи обусловлена тем, что с ростом ω $\chi \rightarrow \infty$, причем чем круче ядро $K(x, y)$ меняется на отрезке $a \leq y \leq b$, тем медленнее будет возрастать χ . По переменной x ядро считается непрерывной функцией с непрерывной частной производной $\partial K/\partial x$. Таким образом, если по условиям задачи существует возможность деформировать ядро в направлении его «обострения», т. е. $K(x, y) \rightarrow \delta(x - y)$, то такую операцию следует рассматривать как эффективную регуляризующую процедуру.

Обратимся теперь к эффекту Ханле в его элементар-

ной классической трактовке [183]. Пусть возбужденное состояние атома — дублет с энергиями уровней $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$, основное состояние синглетно (энергия $\hbar\omega_0$), дипольный переход моделируется линейным осциллятором. Тогда для напряженности поля $E(t)$ излучаемой волны и ее интенсивности $I(\omega t)$ имеем

$$E(t) = \sum_{i=1}^2 E_i \exp \{i[(\omega_i - \omega_0)t + \beta_i]\},$$

$$I(\omega t) = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \cos(\omega t + \beta), \quad (4.32)$$

$$\omega = |\omega_2 - \omega_1|, \quad \beta = \beta_2 - \beta_1.$$

Деполаризационный эффект Ханле, очевидно, проявится, если интерференционный член в $I(\omega t)$ после усреднения даст ненулевой вклад. Пусть распад каждого из компонентов дублета происходит по закону

$$K(t, \tau) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau). \quad (4.33)$$

Тогда усреднение по ансамблю излучающих атомов приводит к выражению типа (4.29)

$$\int_0^{\infty} K(t, \tau) I(\omega, t) dt = \hat{I}(\omega\tau), \quad (4.34)$$

причем, как легко подсчитать,

$$\hat{I}(\omega\tau) = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} [\cos \beta - \omega\tau \sin \beta] [1 + \omega^2 \tau^2]^{-1}. \quad (4.35)$$

Формулу (4.34) можно переписать в эквивалентном виде

$$\int_0^{\infty} K(\tau, t/\omega) I(t) dt = \omega \hat{I}(\omega\tau), \quad (4.36)$$

откуда следует, что в слабом магнитном поле ($\omega \sim H$) имеет место обсуждавшееся выше «обострение» ядра уравнения. Последнее и может рассматриваться как аналог процедуры квазиобращения, воплощаемой экспериментальным путем.

МЕТОД КВАЗИРЕШЕНИЙ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СО СГЛАЖИВАЮЩИМ ФУНКЦИОНАЛОМ

В этой главе рассмотрим методы, которые непосредственно предшествуют получившему наибольшее известность и распространение методу регуляризации А. Н. Тихонова. Следует подчеркнуть, что относящиеся сюда публикации появлялись необязательно до 1963 г., когда вышли из печати основополагающие работы А. Н. Тихонова. Развитие этих более ранних направлений исследования некорректных задач продолжалось и в дальнейшем, причем под влиянием принципов тихоновской регуляризации первоначальные схемы методов заметно модифицировались, так что в настоящее время вряд ли возможно провести какую-то четкую грань, отделяющую одну группу методов от другой.

§ 1. Квазирешения

Идея построения так называемых квазирешений операторного уравнения $K\varphi = f$ в разных вариантах выдвигалась многими авторами начиная еще с 50-х годов. В ее основе лежит стремление избавиться от принципиальной трудности рассматривать некорректную обратную задачу при неточно заданной правой части f , связанной с тем, что формального решения этой задачи не существует. Если, в частности, обратиться к формуле (4.2), то эта трудность не устраняется до конца в том смысле, что для построения приближенного решения необходимо знать функцию корректности, равную модулю непрерывности оператора K^{-1} на KM , где M — множество корректности. Практическим следствием этого была неэффективность использования формул (4.6), (4.7), а также их итерационных аналогов, содержащих в явном виде оператор L . Квазирешение должно обобщать понятие решения в его стандартной трактовке.

Укажем прежде всего на ранние работы Пуччи [343, 344] и Дугласа [279, 280]. В работах Пуччи подробно обсуждаются физический смысл и рациональная поста-

новка задачи Коши для эллиптических уравнений, представляющих значительный интерес с точки зрения физики плазмы [88]. Дуглас решал задачу отыскания гармонической функции, определенной и неотрицательной в полуплоскости $y \geq 0$, по значениям на прямой $y = c$, $c > 0$; им же изучалась проблема аналитического продолжения функции, заданной на окружности радиуса $\rho > 0$, на область $z: |z| \geq \rho$ на классе ограниченных функций. Впоследствии Дуглас распространил развитый им метод на численное решение интегральных уравнений типа Вольterra 1-го рода:

$$\int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (5.1)$$

В данном случае, исходя из условия, что задана приближенная функция $\hat{f}(x)$ и известен компакт $M: \varphi(x) \in M$ (φ — задана точно), он предложил искать приближенное решение $\hat{\varphi}(x) \in M$ как решение экстремальной задачи

$$\|\hat{K}\hat{\varphi} - \hat{f}\| = \inf_{\varphi \in M} \|K\varphi - f\|. \quad (5.2)$$

Обобщение понятия квазирешения и детальное изучение основных математических проблем, связанных с ним (существование, единственность, устойчивость относительно возмущения правой части, алгоритм построения квазирешений), осуществлены В. К. Ивановым и его сотрудниками (см. монографию [81] и цитированную в ней литературу). Основная идея достаточно проста и фактически представляет собой реализацию метода наименьших квадратов с одной лишь важной оговоркой: минимизация невязки производится не на всем пространстве Φ ($\varphi \in \Phi$), а на его, как правило, компактной части $M \subseteq \Phi$. Иными словами, квазирешения определяются условием

$$\varphi_M \in M, \quad \rho_F(K\varphi_M, f) = \inf_{\varphi \in M} \rho_F(K\varphi, f). \quad (5.3)$$

В общем случае квазирешение, очевидно, не обязательно должно быть только одним, однако можно указать достаточные условия, при которых оно единственно и непрерывно зависит от правой части f .

Мы не будем касаться соответствующих теорем и отметим лишь, что для численного нахождения квазирешений

В. К. Ивановым предложена схема, использующая цепочку конечномерных расширяющихся компактов M_n , $n = 1, 2, \dots, M$. В этом случае последовательность решений конечномерных задач

$$\varphi^{(n)} \in M_n: \inf_{\varphi \in M_n} \rho_F(K\varphi, f) = \rho_F(K\varphi^{(n)}, f) \quad (5.4)$$

сходится к искомому квазирешению; схема (5.4) соответствует типичной хорошо изученной задаче линейного программирования и эффективно реализуется на ЭВМ.

Применим метод квазирешений для отыскания решения операторного уравнения $K\varphi = f$. Пусть K — вполне непрерывный оператор из Φ в F , $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m \geq \dots$ — полная система собственных значений оператора K^*K , а $\{\psi_m(x)\}$ — полная в L_2 ортонормальная система его собственных функций. Пусть далее

$$K^*f = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \psi_m. \quad (5.5)$$

Решение ищем на множестве $M \subset \Phi$, причем $M = \Omega_R$ — шар $\|\varphi\| \leq R$. Тогда квазирешение φ_q по Иванову выражается формулой

$$\varphi_q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x) \beta_m / (\mu_m + \mu), \quad (5.6)$$

где $\mu = 0$, если $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 / \mu_m^2 \leq R^2$, и μ — положительный корень уравнения $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 / (\mu_m + \mu)^2 = R^2$, если $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 / \mu_m^2 > R^2$.

В первом случае задача сводится к безусловной минимизации квадратичного функционала $(K\varphi - f, K\varphi - f)$, что приводит к уравнению Эйлера

$$K^*K\varphi = K^*f, \quad (5.7)$$

решение которого есть (5.6) при $\mu = 0$. Очевидно, что в данном случае квазирешение φ_q совпадает с точным.

Во втором случае решается задача на условный минимум функционала $(K\varphi - f, K\varphi - f)$ при условии $(\varphi, \varphi) = R^2$. Метод неопределенных множителей Лагранжа позволяет свести задачу к нахождению безусловного

минимума функционала

$$(K\varphi - f, K\varphi - f) + \mu(\varphi, \varphi)$$

и далее — к уравнению Эйлера

$$K^*K\varphi + \mu\varphi = K^*f, \quad (5.8)$$

которое является операторным уравнением 2-го рода. При приближенном задании f мы, как правило, встречаемся именно с этим случаем. Присутствие μ в знаменателе (4.6) аналогично наличию параметра регуляризации в соответствующих способах квазиобращения, рассмотренных в гл. 4 (см., например, (4.11)): сходимость ряда и устойчивость решения обеспечиваются за счет сдвига спектра собственных значений на величину μ .

В диагностических задачах нередко постановки, когда ядро интегрального уравнения 1-го рода обладает δ -свойством (задачи томографии, способы восстановления функций распределения электронов по энергиям на основе спектров томсоновского рассеяния и т. п.). Как показал А. М. Денисов [70], применительно к такого рода задачам поиск квазирешения очень удобен во многих отношениях.

Отличительной особенностью метода квазирешений Иванова является возможность использовать не только количественную информацию о точности задания входных данных или о степени гладкости искомого решения, но и сугубо качественную информацию, связанную с априорными представлениями о поведении искомого решения. Последние могут быть продиктованы, например, следствиями общих физических законов, ранее известными сведениями о свойствах объекта и природе изучаемого физического процесса, а иногда даже определенными эстетическими соображениями. Более детально соответствующие алгоритмы рассмотрим в гл. 8. Здесь коснемся лишь некоторых исследований такого рода, идейно близких к процедуре поиска квазирешений. Суть заключается в том, что определенный комплекс априорных фрагментов информации зачастую позволяет перевести задачу в ряд условно-корректных еще до этапа ее алгебраизации. Формализовать процедуру поиска квазирешения можно, как указывалось, путем минимизации нормы невязки.

$$\rho_{\varphi}^2 = \int_c^d \left[f(x) - \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \right]^2 dx \quad (5.9)$$

с учетом некоторой системы неравенств. Такого рода подход изложен, в частности, в статье Б. З. Тамбовцева [206], хотя он и не содержал необходимых формальных доказательств близости получаемых решений к точному.

Для иллюстрации рассмотрим пример из области спектроскопии оптического смещения [186]. В последнее время перспективные методы оптического смещения и корреляции фотонов [203] стали все глубже проникать в диагностику плазмы; примером (далеко не единственным) могут служить уже довольно многочисленные работы по лазер-доплеровской анемометрии низкотемпературной плазмы [296].

Наиболее распространенными являются гомодинный, гетеродинный и корреляционный режимы. В гомодинном режиме выделяется составляющая спектра фототока $f_1(u)$ (u — частота, отсчитываемая от центра линии рассеяния с полушириной γ), которая является автоверткой спектра рассеянного излучения $f_2(u)$. В свою очередь, если среда полидисперсна, то $f_2(u)$ есть суперпозиция лоренцианов. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u') f_2(u - u') du' = f_1(u), \quad (5.10)$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\gamma) \gamma [\gamma^2 + u^2]^{-1} d\gamma = f_2(u), \quad (5.11)$$

и приходится последовательно решать уравнения (5.10) и (5.11). В гетеродинном режиме на фотодетектор, осуществляющий смешение радиационных потоков, кроме луча, несущего информацию о среде, направляется опорный луч, в качестве которого обычно используется нерассеянное излучение. С математической точки зрения гетеродинный режим предпочтительнее гомодинного, так как спектроанализатор позволяет непосредственно выделить функцию $f_2(u)$, и тогда необходимо решать лишь уравнение (5.11). Наконец, корреляционный режим за счет включения линии задержки и синтезирующего элемента дает возможность непосредственно регистрировать автокорреляционную функцию фототока $f_2(\tau)$, в результате чего приходится решать интегральное уравнение Фредгольма

1-го рода с экспоненциальным ядром:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\gamma) \exp(-\gamma\tau) d\gamma = f_3(\tau), \quad (5.12)$$

где τ — время задержки.

Хотя во всех трех случаях ядро уравнения имеет простой аналитический вид, оно не является разностным, что, в частности, затрудняет процедуру выбора шага неравномерной сетки. Кроме того, необходимо иметь в виду наличие резких скачков производных у определяемой функции $\varphi(\gamma)$, возможность наложения нескольких пиков этой функции, ее обычно значительную протяженность по шкале полуширин. Все сказанное предьявляет жесткие требования к устранению артефактов, которые могут возникнуть прежде всего из-за не вполне эффективной фильтрации шумовых высокочастотных составляющих. Дополнительная трудность, относящаяся к режиму гомодинирования, — деконволюция автосвертки.

Будем далее считать, что в (5.9) $y = \gamma$, $a = c$, $b = d$, под $f(x)$ понимаются $f_2(u)$ или $f_3(\tau)$, а под $K(x, \gamma)$ — соответственно ядро Коши или экспонента. По своему физическому смыслу функция $\varphi(\gamma)$ неотрицательна ($\varphi(\gamma) \geq 0$)

и суммируема: $\int_a^b \varphi(\gamma) d\gamma \leq M_1$. Если $\varphi \in \Phi$, то указанных условий, вообще говоря, недостаточно для компактности множества Φ и построения квазирешения (это можно показать, например, исходя из свойств оператора Фредгольма). Однако следует принять во внимание, что функция $f(x)$, фигурирующая в (5.9), по существу, фиктивна: вместо нее на практике выступает ее свертка с некоторой аппаратной функцией реального прибора $A(x - x', \Delta)$, т. е.

$$f_A(x) = \Delta^{-1} \int_a^b A(x - x', \Delta) f(x') dx'. \quad (5.13)$$

В качестве A можно для упрощения оценок взять характеристическую функцию отрезка $(-\Delta/2, \Delta/2)$

$$A(x - x', \Delta) = \begin{cases} 1 & |x - x'| \leq \Delta/2, \\ 0 & |x - x'| > \Delta/2. \end{cases} \quad (5.14)$$

Но тогда для $f_A(x)$ сразу следует свойство равномерной непрерывности в среднем в классе $L_2[a, b]$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b |f_A(x + \delta) - f_A(x)|^2 dx \leq \\ & \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta^{-2} \int_a^b \int_a^b f^2(x') [A(x + \delta - x', \Delta) - A(x - x', \Delta)]^2 dx \leq \\ & \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} (28M_2\Delta^{-2}) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

В (5.15) M_2 — мажоранта, существование которой вытекает из равномерной ограниченности $f_A(x)$ по норме

$$\int_a^b |f_A(x)|^2 dx \leq M_2. \quad (5.16)$$

Если $f_A \in F_A$, то, по теореме Рисса [248], условия (5.15) и (5.16) необходимы и достаточны для того, чтобы множество F_A было компактом.

В некоторых практически интересных случаях вид свертки (5.13) может быть сохранен и для функции $\varphi(\gamma)$ [226]

$$\varphi_A(\gamma) = \Delta_1^{-1} \int_a^b A(\gamma - \gamma', \Delta_1) \varphi(\gamma') d\gamma', \quad \Delta_1 \geq \Delta, \quad (5.17)$$

причем в силу принятых ограничений на $\varphi(\gamma)$ и свойств функции A имеем

$$\int_a^b |\varphi_A(\gamma)|^2 d\gamma \leq M_3. \quad (5.18)$$

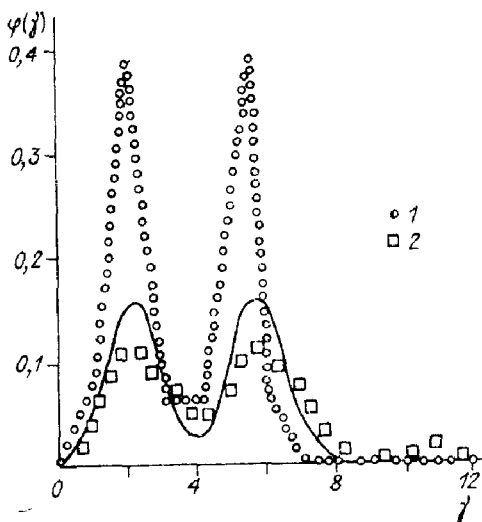
Вновь обращаясь к теореме Рисса, убеждаемся, что если $\varphi_A \in \Phi_A$, то множество Φ_A — компакт, т. е. может быть построено квазирешение задачи путем минимизации функционала

$$\rho_{\varphi_A}^2 = \int_a^b \left[f_A(x) - \int_a^b K(x, \gamma) \varphi_A(\gamma) d\gamma \right]^2 dx \quad (5.19)$$

при $\varphi_A(\gamma) \geq 0$, условиях (5.18), (5.17). Замену ρ_{φ_A} на ρ_φ можно считать оправданной, если $\gamma' > c\Delta_1$, причем, как показывает расчет, $c = 3$ для ядра Коши и $c = 5$ для

Рис. 5. Восстановление дублета гауссиан; $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$; $\gamma_{01} = 2$; $\gamma_{02} = 5,5$.

1 — квазирешение; 2 — статистическая регуляризация с упрощенным учетом неотрицательности $\varphi(\gamma)$; сплошная линия — точное решение.



экспоненциального ядра. Под величиной $\Delta \leq \Delta_1$ в зависимости от схемы эксперимента следует понимать характерный фактор разрешения, связанный с апертурой считывающего зрачка, полосой пропускания спектроанализатора или (для экспоненциального ядра) временем регистрации сигнала автокорреляции.

На рис. 5 показан результат восстановления с помощью описанного алгоритма двух близких гауссиан.

$$\varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^2 a_i \exp[-(\gamma - \gamma_{0i})^2 b_i^{-2}].$$

Сетка бралась равномерной, и правая часть искажалась нормально распределенным 5%-ным шумом. Как видно, передается (причем с преувеличенным контрастом) лишь общий характер модельной функции. Однако артефактов не возникает, что позволяет в принципе продолжать расчет с более мелким шагом сетки, соответствующей «двугорбой» структуре. Конечно, в данном случае не приходится рассчитывать на очень хорошие результаты восстановления, так как алгоритм не содержит ограничений на гладкость решения, а в процессе получения системы неравенств, дополняющих (5.9), делались довольно грубые приближения. Главная цель проведенного анализа состояла фактически в доказательстве возможности выделить компакт, а не в создании конструктивного алгоритма (ни-

же мы еще вернемся к данной задаче). Тем не менее несомненными достоинствами описанного подхода к выбору квазирешения являются его исключительная простота, отсутствие трудностей с выбором параметра регуляризации и легкость реализации на ЭВМ даже с весьма скромными возможностями (типа БЭСМ-4).

§ 2. Метод Филлипса — Туоми

Как мы уже неоднократно отмечали, попытки решения некорректных задач, формулируемых с помощью операторного уравнения $K\varphi = f$, без внесения дополнительной априорной информации о решении приводят к появлению паразитных высокочастотных осцилляций в спектре $\tilde{\varphi}(\omega)$ и, как следствие, к неудовлетворительному восстановлению $\varphi(x)$. Филлипс [340], проанализировавший характер этих осцилляций, отождествил их с аномально большими значениями производных $d^2\varphi(x)/dx^2$ или, что эквивалентно при расчетах на ЭВМ, большими величинами вторых конечных разностей $(\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1})$. Отсюда естественным образом вытекал рецепт для построения регуляризующего алгоритма: необходимо из семейства возможных решений $\varphi(x)$ выбрать наиболее «гладкое» в смысле

минимизации нормы производной $\int_a^b (d\varphi/dx)^2 dx - \min$.

Если при этом $\rho(K\varphi, f)$ — мера отклонения регистрируемой функции f от точной $K\varphi$, то можно показать, что указанный минимум достигается на границе области, определяемой неравенством

$$\rho(K\varphi, f) \leq \rho_0, \quad (5.20)$$

т. е. когда $\rho = \rho_0$.

Соответствующая задача на условный экстремум, решаемая методом Лагранжа, описывается уравнением

$$\rho(K\varphi, f) + \alpha \int_a^b (d\varphi/dx)^2 dx - \min, \quad (5.21)$$

где α — неопределенный множитель, который, согласно Филлипсу, следует находить из условия $\rho = \rho_0$. В конечных разностях нужно записать:

$$\alpha \sum_{n=1}^N (\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}) + \sum_{m=1}^M \left[f(x_m) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^N w_n K(x_m, y_n) \varphi(y_n) \right]^2 - \min, \quad (5.22)$$

где w_n — веса квадратурной формулы, а остальные обозначения не требуют пояснений.

Линейное относительно φ уравнение (5.22) определяет сглаживающий функционал B , которому соответствует симметричная неотрицательная матрица, и алгоритм Филлипса окончательно может быть записан в следующем компактном матричном виде:

$$B = \{\beta_{kl}\}, \\ \beta_{kl} = \gamma_{k-2, l} - 4\gamma_{k-1, l} + 6\gamma_{kl} - 4\gamma_{k+1, l} + \gamma_{k+2, l}, \\ (k, l = 0, 1, \dots, N), \gamma_{kl} = \partial\varphi_k / \partial\xi_l, \quad (5.23) \\ \varphi = (K + \alpha B)^{-1}f, \xi = -\alpha B\varphi.$$

В общем случае, как и ранее (см. гл. 3), ξ описывает стационарный случайный процесс.

Из формул (5.23) ясно, что при $\alpha \rightarrow 0$ приближенное решение Филлипса стремится к точному в условиях задания правой части f без погрешности. Наоборот, с ростом α относительный вес «сглаживания» решения увеличивается, а степень согласованности точного и приближенного решений уменьшается. По мере возрастания α результат восстановления вполне может оказаться еще более искаженным, чем исходные данные f .

Путем прямого моделирования Филлипс без труда убедился, что величина α , находящаяся из условия $\rho = \rho_0$, оказывается сильно завышенной, а решение φ — чересчур заглаженным. Поэтому окончательная рекомендация для поиска параметра α свелась к следующему компромиссному приему: величина α варьируется, а из нескольких решений за наиболее достоверное принимается то, которое в соответствии с выражением $\xi = -\alpha B\varphi$ дает оценку шума, наилучшим образом согласующуюся с имеющимися о нем данными. Эти данные могут, например, касаться дисперсии шума.

Результаты некоторых модельных расчетов приведены на рис. 6. Решалось интегральное уравнение свертки

$$\int_{-3}^{+3} K(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (5.24)$$

где $\varphi(x) = K(x) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi x/3), & |x| \leq 3, \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$

Как легко получить,

$$f(x) = \begin{cases} (x+6)[1 - (1/2) \cos(\pi x/3)] - (9/2\pi) \sin(\pi x/3), & |x| \leq 6, \\ 0, & |x| \geq 6. \end{cases}$$

В первом случае (рис. 6, а) максимальное значение помехи $\xi_{\max} = 0,004$, а среднее ее значение $\langle \xi \rangle = 0,0014$. Таким образом, отношение сигнал/шум чрезвычайно высоко ($> 2 \cdot 10^3$); тем не менее при $\alpha = 0$, т. е. в отсутствие регуляризации, восстановление оказывается очень плохим. Во втором случае (рис. 6, б) $\xi_{\max} = 0,041$, $\langle \xi \rangle = 0,02$ и говорить о восстановлении без регуляризации вообще нет смысла. В обоих случаях алгоритм Филлипса при тщательном, согласованном с дисперсией шума выборе α дает прекрасный результат, причем, как видно, росту ξ_{\max} на порядок отвечает увеличение α в 50 раз.

Значительное усовершенствование алгоритма Филлипса осуществил Туоми [367]. Он принял во внимание, что решения, даваемые формулами (5.23), можно получать, привлекая существенно более широкий класс ограниче-

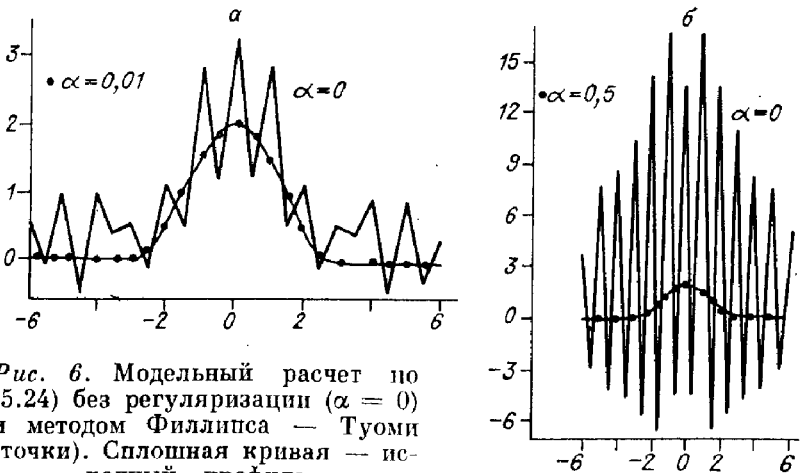


Рис. 6. Модельный расчет по (5.24) без регуляризации ($\alpha = 0$) и методом Филлипса — Туоми (точки). Сплошная кривая — исходный профиль.

а) $\xi_{\max} = 0,004$, $\langle \xi \rangle = 0,0014$; б) $\xi_{\max} = 0,041$, $\langle \xi \rangle = 0,02$.

ний, квадратичных относительно $\varphi(x)$. Например, во многих диагностических задачах вторые конечные разности велики и критерий минимизации должен быть изменен. Так, в случае минимизации третьих разностей следует записать:

$$\min \left\{ \alpha \sum_{n=1}^N (\varphi_{n+1} - 3\varphi_n + 3\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})^2 + \sum_{m=1}^M \xi_m^2 \right\}; \quad (5.25)$$

можно также минимизировать отклонения от известной кривой

$$\min \left\{ \alpha \sum_{n=1}^N (\varphi_n - p_n)^2 + \sum_{m=1}^M \xi_m^2 \right\} \quad (5.26)$$

или, беря линейную комбинацию, сочетать оба вида ограничений. Несколько изменив процедуру выкладок Филлипса, Туоми получил основную расчетную формулу в следующем (матричном) виде:

$$\varphi = (K^*K + \alpha H)^{-1}(K^*f + \alpha p), \quad (5.27)$$

где значение p полагается равным нулю, если «смещающая» кривая $p(x)$ неизвестна, а матрица H определяется выбором способа сглаживания. В частности, для критерия Филлипса

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

а для критерия с минимизацией третьих разностей

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -3 & 10 & -12 & 6 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 3 & -12 & 19 & -15 & 6 & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 & -1 & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Что касается матрицы K , то теперь в отличие от алгоритма Филлипса она может и не быть квадратной. Тем

самым обеспечивается решение задач как с избыточным значением входных данных (f_m), так и с недостаточным ($m < n$) (в последнем случае, конечно, в смысле нормального решения!).

Особенно интересным в алгоритме Филлипса — Туоми (5.27) следует считать возможность восстановления φ при $p \neq 0$. Информация относительно p может быть весьма разнообразной. В табл. 1 приводятся результаты следующего модельного эксперимента [367]. Решалось интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с экспоненциальным неразностным ядром (см. формулу (5.12)) и в условиях, когда шумовая составляющая $\xi(x)$ считалась пренебрежимо малой:

$$\int_0^{0,21} \varphi(y) \exp(-xy) dy = f(x), \quad 5 < x < 35. \quad (5.30)$$

Относительно p было «известно» следующее: решение должно быть монотонным, при $y = 0$ равняться нулю или некоторой малой положительной величине; при $y = 0,21$

Таблица 1

y	φ	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,00	0	-17,8	0,2	1,4	0,0
0,01	1,0	18,9	-4,5	-7,2	2,4
0,02	2,5	-7,1	17,8	-17,8	2,6
0,03	5,0	7,3	-1,8	-5,6	2,9
0,04	7,5	8,5	33,9	11,1	5,1
0,05	10,0	19,3	85,7	34,8	8,9
0,06	14,0	1,4	57,0	58,4	13,5
0,07	17,5	-67,0	40,9	74,2	18,3
0,08	20,0	141,0	111,3	75,6	22,5
0,09	22,0	-254,4	-151,4	59,3	25,0
0,10	25,0	380,5	229,2	25,8	26,9
0,11	29,0	258,6	-170,0	-20,3	28,0
0,12	32,5	-67,1	156,1	-70,6	29,1
0,13	35,5	-141,9	66,3	-113,8	29,5
0,14	38,0	-140,4	-131,3	-137,0	30,7
0,15	40,5	-137,7	186,0	-127,0	32,3
0,16	43,0	-550,7	-343,8	-71,8	40,2
0,17	47,5	890,7	221,3	37,5	58,1
0,18	59,0	-118,5	695,5	205,1	75,9
0,19	125,0	1613,8	-463,6	429,3	174,5
0,20	500,0	-911,5	557,9	700,4	360,3
0,209	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0

$\varphi \simeq 1000$, а в интервале $0,15 \leq y < 0,21$ решение должно испытывать резкий рост от значений $\varphi \leq 100$ до $\varphi \simeq \simeq 1000$. В табл. 1 приводятся следующие пять решений: φ_0 — исходная функция, φ_1 — полученное путем прямого обращения задачи без регуляризации, φ_2 — полученное методом наименьших квадратов ($\alpha = 0$), φ_3 — найденное по алгоритму Филлипса, φ_4 — найденное согласно (5.27) при $H \equiv 0$. Как видно из таблицы, решения φ_1 и φ_2 совершенно неприемлемы, решение φ_3 несмотря на процедуру сглаживания в целом тоже малоэффективно, а φ_4 оказывается наилучшим из сравниваемых. Разумеется, оно еще далеко от оптимального, поскольку одновременный учет сглаживания и ограничений через функцию $p(x)$ не производился.

В дальнейшем [368] Туоми обратил внимание еще на одну важную особенность восстановления φ в соответствии с (5.27), а именно: сглаживание проявляется в уменьшении коэффициентов разложения φ по собственным векторам матрицы K^*K , которые соответствуют векторам с малыми собственными значениями. Благодаря этому устанавливается определенная связь между методом Филлипса — Туоми и квазиобращением с введением единичного оператора (см. гл. 4). Эту связь исследовали затем Рэшфорд и Гаррис [351].

Матрицу K^*K можно аппроксимировать другой матрицей более низкого ранга, учитывая диадическое разложение

$$K^*K = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^*, \quad (5.31)$$

где $q \times q$ — размер симметричной матрицы, λ_i и \mathbf{u}_i ($i = 1, 2, \dots, q$) — неотрицательные собственные значения и ортонормальные собственные векторы матрицы K^*K (для определенности принято: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q$). Путем усечения ряда в (5.31) на $s < q$ и использования разложения K^*f по \mathbf{u}_i , $i = 1, 2, \dots, s$, получаем сглаженную версию

$$\varphi = \sum_{i=1}^s (\kappa_i / \lambda_i) \mathbf{u}_i, \quad (5.32)$$

где $\kappa_i = (\mathbf{u}_i^*, K^*f)$.

В качестве примера применения метода Филлипса — Туоми для целей диагностики плазмы рассмотрим кратко

работу [318]. Ее авторы решают одну из центральных обратных задач спектроскопии оптически плотной плазмы (в астрофизическом варианте): восстановление функции источника S по выходящей интенсивности I , аргументами которой следует считать длину волны λ и косинус угла μ между лучом зрения и нормалью к поверхности плоскопараллельного излучателя в точке выхода луча. В данном случае мы вынуждены, следуя [318], пользоваться общепринятыми физическими обозначениями, иногда совпадающими с уже употреблявшимися математическими (S , μ , λ и т. п.); во избежание недоразумений в необходимых случаях будем делать пояснения входящих величин.

Итак, исходным является уравнение переноса в интегральной форме

$$I(\lambda, \mu) = \mu^{-1} \int_0^{\infty} S(\tau) \exp(-\tau/\mu) d\tau, \quad (5.33)$$

где $\tau = \tau(\lambda)$ — оптическая толщина слоя. Его пишут часто в виде, учитывающем дискретизацию по углам (μ_i) и интегрирование по логарифмическому аргументу $\eta = \ln \tau$:

$$I(\mu_i) = \mu_i^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\eta) \exp(-\tau/\mu_i) \tau d\eta. \quad (5.34)$$

Если принять во внимание слабую чувствительность $I(\mu_i)$ к виду функции источника $S(\eta)$ для достаточно малых и достаточно больших оптических толщин, то можно записать

$$I(\mu_i) \simeq \int_{-\infty}^{\eta_{\min}} K^{(1)}(\eta, \mu_i) S^{(1)}(\eta) d\eta + \\ + \int_{\eta_{\max}}^{\infty} K^{(2)}(\eta, \mu_i) S^{(2)}(\eta) d\eta + \sum_{j=1}^M K_{ij}^{(3)} S_j, \quad (5.35)$$

где $K^{(1)} = K^{(2)} = \exp[|\eta/\mu - \exp(\eta/\mu)|]$, $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ — поправочные члены к функции источника, $K_{ij}^{(3)}$ — квадратурные коэффициенты, а интервал $(\eta_{\min}, \eta_{\max})$ должен быть достаточно широким по сравнению с шириной ядра $K^{(1)} = K^{(2)}$, например, $\eta_{\min} \lesssim -2,5$ и $\eta_{\max} \gtrsim 1,5$. Рас-

сма́тривая первые два слагаемых в (5.35) как учиты-
ваемые поправки к $K_{ij}^{(g)}$, приходит к окончательному алгебраизованному уравнению переноса

$$I(\mu_i) = \sum_{j=1}^M K_{ij} S_j. \quad (5.36)$$

В формуле (5.27), выражающей алгоритм Филлипса — Туоми, приходилось считать $p = 0$, поскольку соответствующей априорной информацией авторы [318] не располагали. С другой стороны, было предложено обобщить (5.27), полагая α не скаляром, а вектором α_Σ с компонентами $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)$, где

$$\alpha_j = \alpha_0 / \left[S'(\tau_j)^2 \sum_{k=1}^M S'(\tau_k)^{-2} \right], \quad \alpha_0 = \sum_{j=1}^M \alpha_j; \quad (5.37)$$

$S'(\tau_j)$ оценивались с помощью известной аппроксимации Барбьери — Эддингтона: $S(\tau = \mu) \simeq I(\mu)$ [314]. Таким образом, метод Филлипса — Туоми реализовался в форме

$$S = (K^*K + \alpha_\Sigma H)^{-1} K^* I, \quad (5.38)$$

где α_Σ — диагональная матрица, соответствующая векторному параметру регуляризации.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов. На рис. 7 показано восстановление функции $S(\tau)$, заданной тремя линейными отрезками:

$$S(\tau) = \begin{cases} 30\tau, & 0 \leq \tau \leq 0,2, \\ 11,8 - 29\tau, & 0,2 \leq \tau \leq 0,4, \\ \tau - 0,2, & 0,4 < \tau < \infty, \end{cases} \quad (5.39)$$

когда $I(\mu) = 30\mu[(\exp(1/5\mu) - 59/30)\exp(-1/5\mu) + 1]$. Наличие погрешности в $I(\mu)$ не учитывалось, матрица H выбиралась по Филлипсу (формула (5.28)). Хорошее восстановление даже столь неблагоприятной для расчета функции источника с резкими изломами позволяло надеяться на еще лучшие результаты для более простых форм $S(\tau)$.

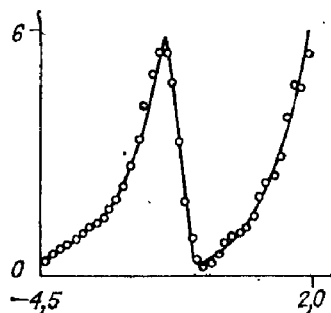


Рис. 7. Восстановление функции источника, заданной согласно (5.39), без учета погрешности правой части.

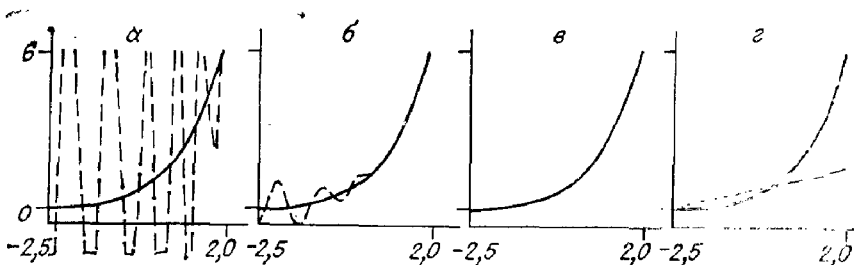


Рис. 8. Восстановление линейной функции источника $S(\tau)$ при различных значениях параметра α_0 без учета погрешности правой части. Сплошная кривая — точное решение, штриховая — восстановленное.

$\alpha_0 \ll \alpha_{opt}$ (а), $\alpha_0 < \alpha_{opt}$ (б), $\alpha_0 \approx \alpha_{opt}$ (в), $\alpha_0 \gg \alpha_{opt}$ (г).

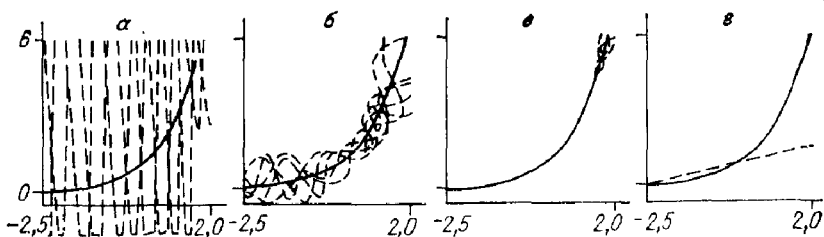


Рис. 9. Восстановление линейной функции источника $S(\tau)$ при различных значениях параметра α_0 с учетом погрешности правой части. Все усл. обозн. соответствуют рис. 8.

На рис. 8 показано восстановление простой линейной функции $S(\tau) = \tau$ (при этом $I(\mu) = \mu$), причем значение параметра α_0 менялось в широком интервале по обе стороны от некоторого оптимального значения α_{opt} . Хорошо видно, как с ростом α_0 подавляются паразитные осцилляции решения, достигается почти идеальное восстановление, а затем превалирует процесс заглаживания истинного решения. В этом случае также не было «шумовой» составляющей $I(\mu)$.

Наконец, на рис. 9 приведены аналогичные графики, когда принималась во внимание случайная погрешность $I(\mu)$, причем относительное стандартное отклонение зависело от μ резко нелинейным образом, имитируя характерный астрофизический эксперимент. Семейства кривых, нанесенных штриховыми линиями, соответствовали нескольким случайным выборкам при одном и том же зна-

чении α_0 ; фактически в эти расчеты входил чисто статистический элемент. В целом в данном случае правильный выбор α_0 обеспечивает вполне удовлетворительное восстановление $S(\tau)$.

ГЛАВА 6

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

§ 1. Общая схема метода

Получивший широкую известность метод, предложенный А. Н. Тихоновым в работах [211, 212] и развитый затем в многочисленных исследованиях (см. литературу в [217]), по структуре алгоритма внешне весьма близок к рассмотренному в предыдущей главе методу Филлипса — Туоми. Однако в принципиальном плане он имеет существенные отличия как от последнего, так тем более и от других методов, обсуждавшихся ранее. В методе Тихонова также появляется параметр регуляризации α , но его включение в алгоритм приобретает уже иной логический смысл. Как указывают авторы обзора [221], у Тихонова «неопределенность параметра α естественно вытекает из самой идеи регуляризации, в то время как при подходе Филлипса она является неприятностью, до известной степени дискредитирующей идею метода».

В основе подхода Тихонова — стремление предельным образом избавиться от произвольных, субъективных факторов и сформулировать наиболее общую концепцию решения некорректной задачи. Тихонов разработал эффективный способ преобразования некорректной задачи в корректную за счет стабилизации минимума среднеквадратического отклонения $K\varphi$ от заданной правой части f при помощи вспомогательного параметрического функционала.

Пусть

$$\varphi = Rf, f \in F, \quad (6.1)$$

где R — оператор, определенный в F со значениями в Φ . Задача вычисления $\varphi \in \Phi$ по $f \in F$ на основании (6.1) окажется поставленной корректно, если:

а) всякому элементу $f \in F$ соответствует некоторый элемент $\varphi \in \Phi$;

б) элемент $\varphi = Rf$ заданием f определяется однозначно;

в) существует непрерывная зависимость φ от возмущений элемента f .

Ясно, что задача $K\varphi = f$, корректная в смысле Адамара, будет корректной и в указанном смысле, если положить $R = K^{-1}$; обратное, вообще говоря, неверно, так как исходная задача в общем случае неэквивалентна (6.1).

Тихонов ввел важное понятие регуляризующего оператора (иногда, например в [60], говорят о регуляризующем алгоритме) $R(f, \alpha)$ для уравнения $K\varphi = f$, который обладает следующими свойствами: а) он определен для всякого $\alpha \geq 0$, а также любого $f \in F$ и непрерывен по f ; б) если δ — погрешность исходных данных $f\sigma$, то существуют такая функция $\alpha(\delta)$ и такое число $\delta(\varepsilon)$ (для любого $\varepsilon > 0$), что при $\rho_F(f, f_\sigma) \leq \delta(\varepsilon)$ выполнится соотношение $\rho_\Phi(\varphi, \varphi_\alpha) \leq \varepsilon$, где $\varphi_\alpha = R(f_\sigma, \alpha(\delta))$. В этом определении f и φ , не снабженные индексами, соответствуют точной правой части и точному решению, ρ_F и ρ_Φ — отклонения в нужной метрике. Тем самым задача сводится, во-первых, к нахождению регуляризующих операторов $R(f, \alpha)$ и, во-вторых, к определению параметра регуляризации α по той или иной дополнительной информации о задаче.

Принцип отыскания $R(f, \alpha)$ вариационный, а именно: следует ввести некоторый неотрицательный функционал $\Omega[\varphi]$, называемый стабилизатором задачи, который определен на подмножестве $\Phi_1 \subset \Phi$. Это подмножество характеризуется тем свойством, что для всякого числа $c > 0$ множество $\Phi_{1,c}$ элементов φ из Φ_1 , для которых $\Omega[\varphi] \leq c$, будет компактом на Φ_1 .

Приближенное решение в силу данного выше определения $R(f, \alpha)$ должно принадлежать какому-то классу Φ_δ элементов φ . Однако этот класс, очевидно, нуждается в сужении, достигаемом требованием, чтобы были изъяты из рассмотрения те элементы множества Φ , для которых не определен стабилизатор $\Omega[\varphi]$. Иными словами, мы обязаны взять пересечение множеств Φ_δ и Φ_1 : $\Phi_2 = \Phi_\delta \cap \Phi_1$ и только среди элементов последнего искать те, которые минимизируют $\Omega[\varphi]$.

Итак, возникает задача на условный экстремум, когда методом неопределенных множителей Лагранжа должен

быть найден минимум функционала

$$M^\alpha [f_\delta, \varphi] = \rho_F^2 (K\varphi, f_\delta) + \alpha \Omega [\varphi], \quad (6.2)$$

причем α можно определить из условия

$$\rho_F (K\varphi_\alpha, f_\delta) = \delta, \quad (6.3)$$

где φ_α — тот элемент, на котором функционал (6.2) достигает минимума. Тот факт, что задача минимизации M^α устойчива по отношению к возмущениям «входных данных» f , может быть строго доказан [217].

В первых основополагающих работах Тихонова [211, 212] конкретный вид M^α предлагалось выбирать так

$$M^\alpha [f_\delta, \varphi] = \|K\varphi - f_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|\varphi\|_{W_2^1}^2, \quad (6.4)$$

т. е. считалось, что решение имеет суммируемую с квадратом первую производную ($W_2^p [a, b]$ — пространство Соболева). В последующих разработках обычно имелось в виду множество функций, обладающих обобщенными производными до p -го порядка и интегрируемых с квадратом, т. е. стабилизатор записывался как

$$\Omega [\varphi] = \int_a^b \sum_{n=0}^p q_n(x) (d^n \varphi / dx^n)^2 dx, \quad (6.5)$$

где $q_n(x)$ — заданные неотрицательные функции.

Вариационная задача (6.2) приводит к уравнению Эйлера, которое содержит матричный эквивалент функционала (6.5) $\Omega[\varphi] \equiv (\varphi, \Omega\varphi)$:

$$(K^*K + \alpha\Omega)\varphi = K^*f, \quad (6.6)$$

так что матричный вид решения

$$\varphi = (K^*K + \alpha\Omega)^{-1}K^*f \quad (6.7)$$

совпадает с (5.27), если принять $p = 0$ и $H = \Omega$. Нужно, впрочем, заметить, что задачу минимизации функционала M^α можно решать прямыми методами поиска экстремума [87], не переходя к уравнению Эйлера (6.6). Совершенно очевидна также связь уравнений (6.6) и (5.8).

Обратимся теперь к вопросу о поиске параметра регуляризации α . Прежде всего заметим, что функционал M^α может быть введен в рассмотрение чисто формально, без связи его с задачей на условный экстремум функционала

$\Omega[\varphi]$. Тогда элемент φ_α , минимизирующий M^α на множестве $\Phi_2 \subset \Phi_\delta$, непосредственно связывается с выбором α как некоторого функционала от φ , $\alpha = \alpha(\varphi)$, для которого оператор $R(\varphi, \alpha(\varphi))$ регуляризующий. При определенных условиях такой функционал оказывается функцией от δ , находимой, например, с помощью (6.3).

При использовании метода Тихонова в разнообразных прикладных задачах получили распространение несколько способов выбора параметра регуляризации α , значение которого так или иначе согласуется с погрешностью исходных данных. Наиболее известным и популярным у практиков является способ определения α по невязке (6.3). Чаще всего решается уравнение в форме

$$\|K\varphi_\alpha - f_\delta\|_{L_2} = \delta, \quad (6.8)$$

причем для этой цели оказывается удобным следующий итерационный процесс [75]. Сначала уравнение (6.8) решается при некотором α_0 , значение которого оценивается по одной из формул:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \|K^*KV^{-1}K^*\|\delta / [\|K^*f_\delta\| - \|K^*\|\delta], \\ \alpha_0 &= \|KV^{-1}K^*\|\delta / [\|f_\delta\| - \delta], \\ \alpha_0 &= \|K^*KV^{-1}\| \cdot \|K^*\| \cdot \|f_\delta\| / [2\|K^*f_\delta\| - \|K^*\| \cdot \|f_\delta\|], \\ \alpha_0 &= \delta \|K\|^2 / [\|f_\delta\| - \delta], \end{aligned} \quad (6.9)$$

где предполагается, что стабилизатор имеет вид: $\Omega[\varphi] = (V\varphi, \varphi)$. Затем строятся последовательные приближения

$$\alpha_{i+1} = \|f_\delta\|^2 \alpha_i / 4\|K\varphi_{\alpha_i} - f_\delta\|, \quad (6.10)$$

и итерационный процесс заканчивается, когда

$$|1 - \alpha_i/\alpha_{i+1}| < \varepsilon, \quad (6.11)$$

где ε — наперед заданная малая величина.

Достоинство метода невязки в его логической прозрачности и легкости реализации на ЭВМ. Однако существуют недостатки, которые, к сожалению, не всегда учитываются практиками. Во-первых, метод требует достаточно точного знания погрешности δ , поскольку сама задача определения α по (6.8) не отличается хорошей устойчивостью. Во-вторых, нахождение α по невязке даже в случае, когда оператор K линейный, а пространство F гильбертово, может оказаться неоднозначным.

Например, если у стабилизатора $\Omega[\varphi]$ для каких-то $\varphi \neq 0$, $\varphi \in \Phi_1$ не существует отличных от нуля производных Фреше $\Omega'[\varphi]$, единственное решение отсутствует [217]. Если же оператор K нелинейный, то в общем случае метод невязки вообще неприменим (хотя ряд исключений имеет место) [60, 217].

В приложениях нередко употребляются также другие способы выбора α : квазиоптимального ($\alpha_{\text{кв}}$) и α -отношения ($\alpha_{\text{от}}$). В первом случае [218] $\alpha_{\text{кв}}$ находится как значение α , которое реализует

$$\inf_{\alpha > 0} \sup_{\rho_F(f_\delta, f) < \delta} \|\alpha (d\varphi_\alpha/d\alpha)\|_{\Phi}. \quad (6.12)$$

На практике зачастую используют так называемую ослабленную форму выбора $\alpha_{\text{кв}}$, реализующую

$$\inf_{\alpha > 0} \|\alpha (d\varphi_\alpha/d\alpha)\|_{W_2^1}. \quad (6.13)$$

Если таких значений несколько, то в качестве $\alpha_{\text{кв}}$ берут наименьшее из них. Более общая форма выбора $\alpha_{\text{кв}}$ по (6.12) эффективна лишь тогда, когда есть возможность найти регуляризованные решения φ_α , соответствующие большому набору f_δ ; обычно экспериментатор лишен такой возможности, в связи с чем более конструктивной оказывается формула (6.13).

Другой способ основан на вычислении такого $\alpha = \alpha_{\text{от}}$, при котором достигается максимум отношения двух норм [75]:

$$\|K\alpha(d\varphi_\alpha/d\alpha) - [K\varphi_\alpha - f_\delta]\| / \|K\varphi_\alpha - f_\delta\|. \quad (6.14)$$

Исследователи, искавшие $\alpha_{\text{кв}}$ и $\alpha_{\text{от}}$ по (6.12) — (6.14), не раз отмечали, что соответствующие задачи отыскания экстремумов усложняются наличием нескольких локальных минимумов (6.12), (6.13) или нескольких локальных максимумов (6.14) и поэтому нуждаются в тщательном контроле, сопоставлении друг с другом и с методом невязки. Авторы работы [75] на основании сравнительного анализа показали наличие важной совокупности неравенств:

$$\alpha_{\text{н}} \geq \alpha_{\text{кв}} \geq \alpha_{\text{опт}} \geq \alpha_{\text{от}}, \quad (6.15)$$

где $\alpha_{\text{н}}$ — параметр α , находимый по невязке, а $\alpha_{\text{опт}}$ — его оптимальное значение, которое не определяется ни

одним из перечисленных способов и при котором имеет место наилучшее совпадение между φ_α и точным решением φ .

Наконец, отметим интересную работу А. С. Леонова [126], дающую достаточно строгое обоснование способам нахождения $\alpha_{\text{ю}}$ и $\alpha_{\text{от}}$ для широкого класса обратных задач. В некоторых случаях может также оказаться полезным метод априорной оценки α :

$$\alpha_{\text{а0}} = 4\delta^2 / \|\varphi\|_{W_2^p}^2, \quad (6.16)$$

где норма решения оценивается для пространства Соболева W_2^p .

Все сказанное нами относительно поиска регуляризирующих операторов $R(f, \alpha)$ и параметра регуляризации α приводит к выводу о том, что необходим еще некий принцип, позволяющий приблизиться к оптимальному решению задачи в целом.

Возможность формулировки такого принципа обсуждалась в работе [217], а его конкретные формы применительно к инверсии Абеля — в [176]. Ставится задача выбора из бесконечных семейств $\{\Omega[\varphi]\}$ и $\{\alpha(\delta)\}$ элементов, обеспечивающих некий оптимум решения, выделяемого из уже ограниченного регуляризацией, но все еще бесконечного подмножества Q . Следуя [217], можно определить оптимальное решение $\varphi_\alpha^{\text{опт}}$ как такое, при котором

$$\rho_\Phi(\varphi_\alpha^{\text{опт}}, \varphi) = \inf_{\varphi_\alpha \in Q} \rho_\Phi(\varphi_\alpha, \varphi), \quad (6.17)$$

где φ — точное решение уравнения $K\varphi = f$ с точной правой частью f . При такой постановке задачи необходимо выяснить:

— насколько универсален и удобен в практической реализации критерий (6.17);

— какова структура подмножества Q , в частности, целесообразно ли фиксировать Ω и варьировать $\alpha(\delta)$ или следует варьировать Ω и α одновременно;

— как следует поступать при поиске $\varphi_\alpha^{\text{опт}}$, если мы не располагаем точными исходными данными;

— каков наилучший способ определения $\varphi_\alpha^{\text{опт}}$, если речь идет об отыскании существенно негладких или сильно осциллирующих решений;

— как изменяются свойства подмножества Q и регуляризирующей процедуры в целом при переходе от одномерной задачи с некоторым линейным оператором к соответствующей многомерной (например, от инверсии Абеля к инверсии Радона и т. п.);

— как следует ставить задачу поиска $\varphi_{\alpha}^{\text{опт}}$, если данная обратная задача — модуль некоторого пакета программ [251] и т. п.

На большую часть этих вопросов пока еще не дано сколько-нибудь исчерпывающего ответа, в связи с чем проблема «вторичной регуляризации», если позволительно использовать такой термин, по существу остается открытой.

Остановимся теперь на некоторых теоретических вопросах, относящихся к методу Тихонова, которые особенно важны во многих задачах диагностики плазмы.

§ 2. Обобщение метода на случай, когда линейный оператор задачи задан приближенно

Указанное обобщение выполнено в серии работ А. В. Гончарского с соавторами и детально описано в монографиях [60, 217] (ссылки на оригинальные работы там же). Проведем здесь лишь основные формулы, поскольку ни общая структура алгоритма, ни цепь рассуждений, с помощью которых получают все эти формулы, не претерпевают каких-либо радикальных изменений в сравнении с описанными выше.

Имеем приближенно заданные оператор K_h и правую часть f_{δ} ; парой чисел $\{h, \delta\}$, обозначаемой далее через γ , характеризуются погрешности этих приближений. Неточность задания K_h определим условием

$$\rho_F^2(K_h\varphi, K\varphi) \leq h^2\Omega[\varphi], \quad (6.18)$$

где Ω — по-прежнему стабилизатор задачи, K — точный оператор.

Вместо формулы (6.2) для сглаживающего функционала M^{α} нужно записать

$$M^{\alpha}[f_{\delta}, K_h, \varphi] = \rho_F^2(K_h\varphi, f_{\delta}) + \alpha\Omega[\varphi]. \quad (6.19)$$

Введем обобщенную невязку

$$\Delta_\gamma(\alpha) = \rho_F^2(K_h \varphi_\gamma^\alpha, f_\delta) - [\delta + h \{\Omega[\varphi_\gamma^\alpha]^{1/2}\}]^2 - \inf_{\varphi \in \Phi} \rho_F^2(K_h \varphi, f_\delta) \quad (6.20)$$

и будем искать α из уравнения $\Delta_\gamma(\alpha) = 0$; при этом, если $\delta^2 > \inf_{\varphi \in \Phi} \rho_F^2(K_h \varphi, f_\delta)$, последнее слагаемое в правой части (6.20) можно не учитывать. Способ выбора стабилизатора остается прежним.

§ 3. Обобщение метода на случай неограниченного оператора задачи

Модификация метода Тихонова в случае, когда решается интегральное уравнение с сингулярным ядром либо линейное некорректное интегродифференциальное уравнение с частными производными, рассмотрена В. П. Масловым [135]. Такого рода задачи распространены в кинетике плазмы [17] и естественным образом возникают при разработке соответствующих методов диагностики.

Подход, предложенный Масловым, относится к линейным замкнутым операторам K . Если бы K был ограничен, то формальная схема регуляризации по Тихонову выглядела бы таким образом:

$$(K^*K + \beta)\varphi_\beta = K^*f_\delta, \quad 0 < \beta \leq \|f_\delta - f\|. \quad (6.21)$$

Если же K неограничен, то, согласно [135], нужно сначала «сгладить» элемент f_δ , решая уравнение

$$(\beta K K^* + E)u_\beta = f_\delta, \quad (6.22)$$

а затем воспользоваться обычной тихоновской регуляризацией в форме

$$(K^*K + \beta_1)\varphi_\beta = K^*u_\beta, \quad (6.23)$$

где
$$\beta_1 = \|[(\beta K K^* + E)^{-1} - E]f_\delta\|. \quad (6.24)$$

В дальнейшем В. П. Масловым показано [147], что сходимость регуляризующего процесса и разрешимость исходной задачи в случае, когда $\Phi \ni \varphi$, $F \ni f$ гильбертовы, эквивалентны.

§ 4. Метод Тихонова в нелинейных задачах

Как известно, нелинейность оператора K в задаче $K\varphi = f$ резко усложняет решение обратной некорректной задачи по многим обстоятельствам [147]. Например, невязка $\rho_F^2(K\varphi_\alpha, f_\delta)$, вообще говоря, не является непрерывной функцией α и может быть не монотонной. Поэтому уравнение $\rho_F^2(K\varphi_\alpha, f_\delta) = \delta^2$ относительно α может либо не иметь решения вовсе, либо иметь множество решений. Возможность существования бифуркаций и ветвления решений исходного нелинейного уравнения чрезвычайно затрудняет сколько-нибудь общий подход к обратной задаче [30].

Тем не менее распространение как метода Тихонова, так и методов нелинейного программирования на нелинейные обратные задачи — отнюдь не безнадежная проблема и на сегодняшний день заметный прогресс в этом отношении уже налицо. Прежде всего отметим, что в ряде случаев нелинейной задаче можно поставить в соответствие некоторую последовательность линейных уравнений, а для последних осуществлять регуляризацию обычного типа.

Более радикальный подход рассмотрен А. Н. Тихоновым [213], а также А. Н. Тихоновым и В. Б. Гласко [219] применительно к важному в практическом отношении классу нелинейных интегральных уравнений с оператором Урысона:

$$A[x, \varphi(y)] \equiv \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x), \quad (6.25)$$

$$c \leq x \leq d.$$

Рассмотрение проведено для случая, когда:

- а) $A[x, \varphi_1(y)] \neq A[x, \varphi_2(y)]$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$;
- б) $A[x, \varphi_n(y)]_{L_2} \rightarrow A[x, \varphi_0(y)]$ при $\varphi_n(y) \rightarrow \varphi_0(y)$, $\varphi_n(y) \in C$;
- в) K'_φ и K''_φ непрерывны по φ в окрестности такого решения;

г) в W_2^1 для линейного уравнения $\int_a^b K'_\varphi \chi(y) dy = 0$ имеется лишь тривиальное решение.

Отметим, что класс задач, отвечающих перечисленным условиям, достаточно широк.

При построении регуляризованного решения по схеме, сходной с описанной ранее, получен ряд фундаментальных результатов. Если определен сглаживающий функционал

$$M^\alpha[\varphi, f] = \int_c^d (A[x, \varphi] - f)^2 dx + \alpha \int_a^b \sum_{n=0}^1 q_n(x) (d^n \varphi / dx^n)^2 dx, \quad (6.26)$$

то оказываются справедливыми следующие утверждения: а) существует функция $\varphi_\alpha(x)$, минимизирующая M^α ; б) при подходящем выборе зависимости $\alpha(\delta)$ решение φ_α будет близким к точному, если f также близко к точной правой части уравнения; в) элемент φ_α будет единственным.

Эти результаты общетеоретического характера были положены в основу построения конкретного алгоритма решения уравнения (6.25), в котором $a = c = -l$, $b = d = l$. В функционале (6.26) бралось $q_0 = 0$, $q_1 = 1$. Удобным способом минимизации M_α при соответствующем α является решение уравнения Эйлера вида

$$P_\alpha[\eta, \varphi] = \int_{-l}^l \bar{K}[y, \eta, \varphi(y), \varphi(\eta)] dy - \alpha \varphi''(\eta) - b[\eta, \varphi(\eta)] = 0 \quad (6.27)$$

при одном из двух типов граничных условий:

$$\varphi(-l) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi'(-l) = \varphi'(l) = 0, \quad (6.28)$$

выбор которого зависит от характера дополнительной информации относительно решения задачи. При этом

$$\begin{aligned} \bar{K}[y, \eta, \varphi(y), \varphi(\eta)] &= \int_{-l}^l K[x, y, \varphi(y)] K'_\varphi[x, \eta, \varphi(\eta)] dx, \\ b[\eta, \varphi(\eta)] &= \int_{-l}^l K'_\varphi[x, \eta, \varphi(\eta)] f(x) dx. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Для решения уравнения (6.27) при заданном α теперь можно осуществить линеаризацию, например, основанную на методе Ньютона, а затем воспользоваться подходящим

итерационным процессом с выбором α в квазиоптимальном приближении.

Наиболее полно метод регуляризации для решения нелинейных операторных уравнений 1-го рода вида

$$K[\varphi] = f \quad (\varphi \in \Phi; f \in F) \quad (6.30)$$

был развит в работе А. Н. Тихонова [214], где введено принципиальное понятие S -компактного вложения метрического пространства $\bar{\Phi}$ в метрическое пространство Φ . Например, пространство Соболева $W_2^1[a, b]$ S -компактно вложено в пространство $C[a, b]$.

Предполагая, что в Φ S -компактно вкладывается некоторое гильбертово пространство $\bar{\Phi}$, причем последнее является множеством единственности для оператора K из (6.30), т. е. $K[\varphi_1] \neq K[\varphi_2]$, если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{\Phi}$, А. Н. Тихонов показал возможность введения параметрического функционала

$$M^\alpha[\varphi, f_\delta] = \rho_F^2(K\varphi, f_\delta) + \alpha\Omega[\varphi], \quad \varphi \in \bar{\Phi}, \quad (6.31)$$

где $\Omega[\varphi] = \|\varphi\|_{\bar{\Phi}}^2$, и рассмотрел соответствующую задачу минимизации. В результате доказаны существование регуляризованных решений из $\bar{\Phi}$ при всех $\alpha > 0$ и любом $f_\delta \in F$, а также сходимость их в пространстве Φ . Проанализированы достаточные условия, обеспечивающие единственность решения.

Концепцию S -компактного вложения следует считать особенно плодотворной с точки зрения практических приложений метода регуляризации, в первую очередь в силу того, что при приближенном решении нелинейной задачи не используется специальной количественной информации об искомом решении.

Отметим еще работу А. Д. Горбунова [63], где анализируются возможности применения методов Тихонова к решению неустойчивых нелинейных краевых задач и исследованию различных типов сходимости регуляризованных решений к обобщенным решениям исходной задачи.

Наконец, имея в виду приложения к задачам диагностики плазмы, следует упомянуть интересную работу Ю. И. Худака [235], посвященную проблеме идентификации системы, состоящей из линейного стационарного и нелинейного безынерционного звеньев в соответствии со

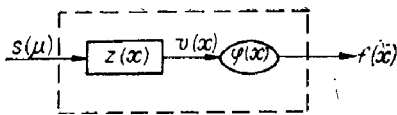


Рис. 10. Линейное и нелинейное звенья в задаче идентификации [235].

описывающая нелинейную часть объекта, $f(x)$ — выходной сигнал.

Проблема идентификации такой системы приводит к необходимости решения нелинейного уравнения

$$\varphi \left(\int_0^{\infty} s(x - \mu) z(\mu) d\mu \right) = f(x) \quad (6.32)$$

относительно неизвестных функций $z(\mu)$ и $\varphi(v)$. С введением промежуточной функции $v(x)$ (6.32) можно записать в виде системы двух уравнений: интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода и функционального уравнения:

$$\int_0^{\infty} s(x - \mu) z(\mu) d\mu = v(x), \quad (6.33)$$

$$\varphi(v(x)) = f(x).$$

Общая постановка задачи, очевидно, состоит в выявлении тех свойств семейства пробных сигналов, при которых допустимо единственное решение задачи. В работе [235] такую постановку в полной мере реализовать не удалось, однако одно конкретное семейство указанного типа выделено и дан алгоритм его использования для идентификации системы. Отметим, что оригинальный метод анализа задачи, предложенный Ю. И. Худаком, далеко не исчерпал своих возможностей и явно нуждается в дальнейшем исследовании.

Наконец, укажем на важную в принципиальном отношении работу [59], в которой предложен и обоснован альтернативный способ выбора параметра невязки для нелинейных задач. Несколько ранее теми же авторами был разработан способ построения регуляризующего алгоритма с помощью сходящейся последовательности функций, пригодный как для линейных, так и для нелинейных задач; соответствующая теория подробно описана в монографии [60].

§ 5. Метод Тихонова в многомерных задачах

В принципиальном отношении переход от линейных одномерных к линейным многомерным неустойчивым обратным задачам не вызывает радикальных изменений в регуляризирующих алгоритмах общего типа (квазиобращение, квазирешения, метод Тихонова) [120]. Как правило, более сложным оказывается доказательство соответствующих теорем единственности. В работе [120] показано, что новые способы доказательства теорем единственности для линейных операторных уравнений 1-го рода позволяют строить специальные алгоритмы решения, а также делать оценки, характеризующие устойчивость постановок задач на некоторых конкретных компактах (например, на множестве функций с равномерно ограниченным модулем градиента).

Для решения многомерных интегральных уравнений с разностным ядром А. В. Чечкиным предложена специальная конструкция метода тихоновской регуляризации [243]. В этой работе использованы известные спектральные свойства искомого решения, с помощью которых выбирается функционал $\Omega\{\varphi\}$. Данный подход представляет интерес с точки зрения развития зондовых методов диагностики плазмы, а также обработки данных с двумерных носителей информации.

В монографии [35] приводится интересный пример машинной обработки дефокусированного изображения (портрета), основанной на применении метода Тихонова. Хотя обработка производилась на явно несовременной ЭВМ (М-222 с быстродействием ~ 20 тыс. приведенных операций в секунду), а массив входных данных составлял 256×256 элементов, процесс восстановления вполне качественного изображения занимал время всего порядка 1 ч (с учетом времени обмена с внешними устройствами). При этом удалось проследить, как влияет значение параметра регуляризации α на визуальное качество восстановления.

Авторы работы [12] предприняли весьма интересную с прикладной точки зрения попытку использовать тихоновскую регуляризацию для решения двумерной задачи локализации фазового объекта по набору оптических длин лучей одного направления. Как известно, в этой типичной задаче томографии считается обязательной

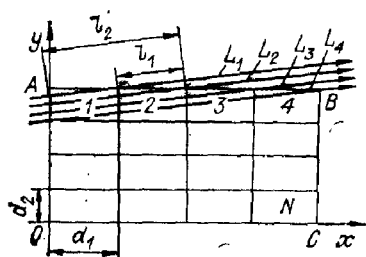


Рис. 11. Схема хода лучей и разбиения прямоугольного фазового объекта на ячейки.

обработка двумерной картины при наличии целой совокупности наборов параллельных (или идущих веером) лучей, фиксируемых по большому числу направлений — в медицинских томографических установках $\sim 10^2$ и больше (см. гл. 9). Однако, как утверждается в [12], формально непротиворечивая постановка задачи возможна и при одном направлении лучей зрения.

В самом деле, если, согласно авторам [12], выбрать исследуемый фазовый объект в виде прямоугольника $ABCO$ (рис. 11), стороны которого a и b направлены по осям x и y , а затем разбить его на N одинаковых прямоугольных ячеек со сторонами d_1 и d_2 , то исходное уравнение

$$\int \varphi(x, y) R(x, y) dl = \lambda f, \quad (6.34)$$

где $R(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$

D — область объекта, λ — длина волны просвечивающего излучения, f — измеряемый вдоль l сигнал, можно легко алгебраизовать. Для этого потребуем, чтобы внутри каждой ячейки $\varphi(x, y) = \text{const}$, а направление просвечивания определим углом

$$\beta = \text{arc tg}(d_2/a). \quad (6.35)$$

Тогда искомый вектор $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ будет иметь на (a/d_1) — 1 меньше компонентов, чем вектор \mathbf{f} . С ростом числа N переопределенность соответствующей системы линейных алгебраических уравнений может только возрастать. Процедура поиска нормального решения для такой системы хорошо известна [217] и остается только исследовать фактическое качество восстановления функции φ при различных уровнях погрешности правой части.

Два результата решения модельных задач показаны на рис. 12. В первом случае (а) прямоугольник разбивал-

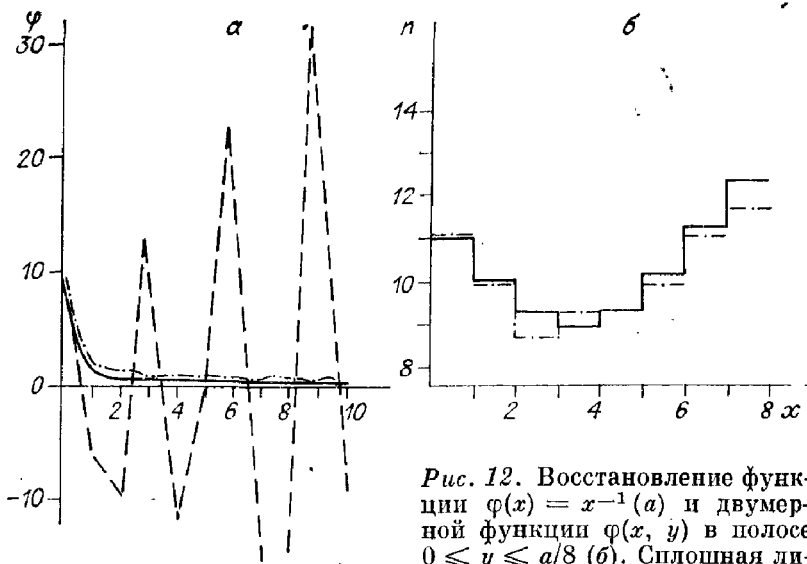


Рис. 12. Восстановление функции $\varphi(x) = x^{-1}$ (а) и двумерной функции $\varphi(x, y)$ в полосе $0 \leq y \leq a/8$ (б). Сплошная линия — точное решение, штрихпунктирная — регуляризация по Тихонову, штриховая — нерегуляризованное решение. Погрешность правой части 5%.

ся на полосы: $d_2 = b$, т. е. задача фактически становилась одномерной и восстанавливалась функция $\varphi(x) = x^{-1}$ с набросом на правую часть 5%-ной погрешности. При этом, если бы лучи шли параллельно направлению полос, результат получался бы немедленно, без каких-либо расчетов. Однако при наклонном ходе лучей отсутствие регуляризации уже не позволяет решить задачу; метод Тихонова в этих условиях обеспечивает вполне приемлемое решение. Во втором случае поле разбивалось на $N = 8 \times 8 = 64$ ячеек и для их последовательности, примыкающей к оси x ($0 \leq y \leq a/8$), восстановление $\varphi(x, y) = C [1 + (x^2 + y^2)/2x_0^2]$ при той же 5%-ной погрешности в правой части также оказалось возможным (рис. 12, б). Авторы [12] считают, что есть все основания рассчитывать на дальнейшее улучшение результатов при увеличении числа дискретных отсчетов (а следовательно, и ячеек N).

В работе [330] теоретически обсуждался вопрос о возможности использования одного направления для восстановления функций с ограниченным спектром по конечному числу отсчетов. Доказывается (для случая квадратного объекта $M \times M$) теорема, согласно которой ограниченная по спектру функция $\varphi(x, y)$ точно представима

своей единственной проекцией под некоторым критическим углом θ . Правда, авторы [330], делая оценку отношения дисперсий η для восстановления и экспериментального измерения, получают

$$\eta = M^{-4} (2Me/\pi)^{2M^2-2}, \quad (6.36)$$

откуда следует практическая невозможность восстановить $\varphi(x, y)$ в силу очень плохой обусловленности системы уравнений. Но вопрос о том, насколько улучшится ситуация при последовательной регуляризации задачи, в этой работе фактически остался открытым.

По условиям плазменного эксперимента (например, при использовании голографической интерферометрии или съемке эмиссионного спектра) зачастую нельзя реализовать большой набор направлений наблюдения, поэтому дальнейшее исследование возможностей алгоритма [12] представляется очень существенным. Нужно только иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, форма алгоритма регуляризации, при которой приходится обращаться матрицы ранга $(N + (a/d_1) - 1)$, явно неэффективна с точки зрения ресурсов памяти ЭВМ. Здесь, по-видимому, возможны чисто расчетные усовершенствования изложенной схемы. Во-вторых, решение может оказаться хотя и достаточно устойчивым, но не единственным. Например, если произвести разрез прямоугольника $ABCO$ (см. рис. 11) по нормали к выбранному направлению лучей зрения и раздвинуть обе части по этому направлению, то функция f в (6.34) останется прежней. Аналогичная ситуация возникает в случае, когда вдоль того же направления мы начнем смещать некоторый профиль $\Delta\varphi(x, y)$ либо совершим поворот вокруг нормали всей плоскости фазового объекта на 180° . Таким образом, задача нуждается в дополнительной априорной информации, обеспечивающей единственность решения. Возможным способом улучшения алгоритма является, конечно, использование нескольких близких направлений наблюдения, допускаемых, например, размерами окон плазменной установки. До известной степени это дискредитирует идею «одноркурсности», выдвигаемую в [12], но зато может позволить хотя бы грубо восстанавливать асимметричную структуру объекта без введения априорных допущений о форме изолиний.

§ 6. Восстановление функций с разрывами производных

В диагностике плазмы встречается немало задач, сводящихся к интегральным уравнениям 1-го рода:

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (6.37)$$

для которых заранее известно, что искомая функция $\varphi(y)$ содержит участки с «изломами», т. е. производная $\varphi'(y)$ терпит разрыв. В качестве примера можно привести многие обратные задачи теории зондов [240], диагностические флуоресцентные методы, использующие мощный импульсный лазер [329], редуционные задачи с контрастированием сигнала [234] и т. п.

Легко понять, что в данном случае процедура регуляризации с использованием обычного сглаживающего оператора не позволяет рассчитывать на получение хороших результатов восстановления $\varphi(y)$. Это было наглядно проиллюстрировано серией расчетов Бараката и Блэкмана [256], применивших тихоновский алгоритм к задаче восстановления импульса прямоугольной формы, искаженно-го «дифракционной» аппаратной функцией

$$K(x, y) = [\pi(x - y)]^{-2} \sin^2(x - y). \quad (6.38)$$

На рис. 13 кроме восстанавливаемой прямоугольной функции $\varphi(x)$ (при $-\infty < x < -x_0$ и $x_0 < x < \infty$ $\varphi = 0$; при $-x_0 \leq x \leq x_0$ $\varphi = 1$) показаны свертка $f(x)$, выражаемая формулой

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y) \varphi(y) dy = \pi^{-1} \{ \text{Si}[2(x - x_0)] - \\ - \text{Si}[2(x + x_0)] + (x - x_0)^{-1} \sin^2(x - x_0) - \\ - (x + x_0)^{-1} \sin^2(x + x_0) \}, \quad (6.39)$$

где Si — интегральный синус, а также два результата восстановления [36]. Хотя метод сопряженных градиентов дал определенное улучшение результатов в области нулевых значений сигнала, все же радикального усовершенствования алгоритма в данной работе достигнуто не

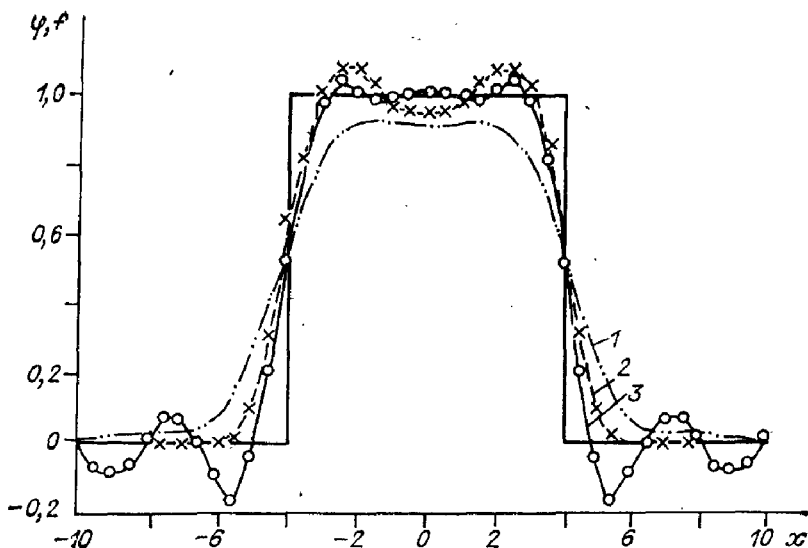


Рис. 13. Восстановление прямоугольной функции $f(x)$.
 1 — свертка $f(x)$ (6.39); 2 — регуляризация по Тихонову; 3 — модифицированный метод сопряженных градиентов [36]. Дисперсия погрешности $f(x)$ 3%.

было, поскольку априорно известные особенности искомого решения не включались явно в расчетную схему.

Значительно большего удалось добиться в работе [37], где был применен иной подход к задаче. Его можно проиллюстрировать на конкретном примере. Из уравнения (6.37) с ядром (6.38) и $a = -\infty$, $b = +\infty$ восстанавливались функции $\varphi(y)$, имевшие трапецеидальную форму (равнобочные и неравнобочные трапеции, в пределе вырождавшиеся в треугольники и прямоугольники). На первом этапе использовалась одна из обычных схем регуляризации с априорными ограничениями, касающимися гладкости и в некоторых случаях неотрицательности решения, что давало предварительную сглаженную версию $\varphi_0(y)$. Далее на основании найденной $\varphi_0(y)$ строилась аппроксимирующая функция $\varphi_\alpha(y)$, состоящая из отрезков прямых и уже имевшая трапецеидальную форму. (Отметим, что способ перехода от $\varphi_0(y)$ к $\varphi_\alpha(y)$ не является особенно существенным и критичным.) Вслед за этим искомое решение представлялось в виде

$$\varphi(y) = \varphi_\alpha(y)\psi(y), \quad (6.40)$$

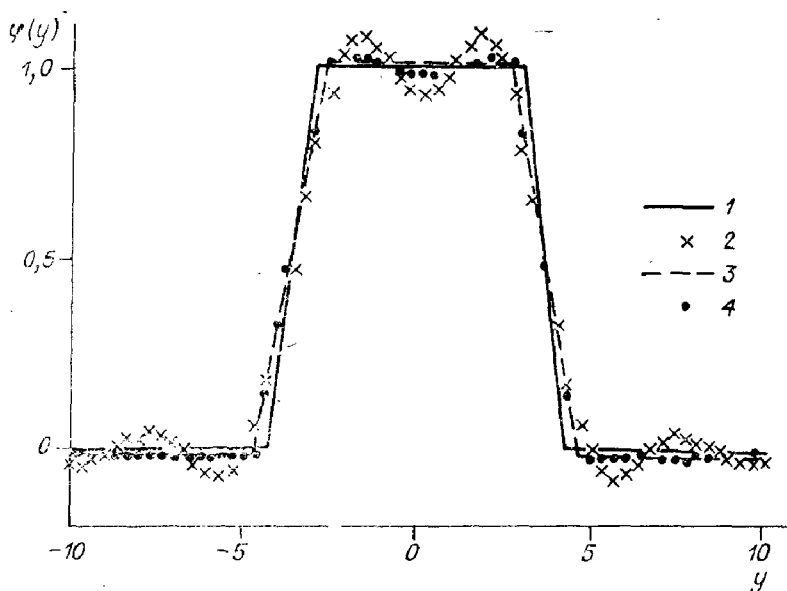


Рис. 14. Восстановление трапецидальной функции $\varphi(y)$.

1 — точное решение, 2 — восстановление без аппроксимирующей функции $\varphi_\alpha(y)$; 3 — $\varphi_\alpha(y)$; 4 — восстановление с аппроксимирующей функцией.

и функция φ_α вводилась как множитель в новое ядро $K_\alpha(x, y) = K(x, y)\varphi_\alpha(y)$ и с ним решалось интегральное уравнение 1-го рода относительно $\psi(y)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(x, y) \psi(y) dy = f(x). \quad (6.41)$$

На этом этапе слова можно было использовать априорные ограничения о гладкости — уже по отношению к $\psi(y)$. Найденная поправочная функция $\psi(y)$ согласно (6.40) позволяла найти $\varphi(y)$, дальнейшее улучшение которой (в принципе возможное) на практике уже не требовалось (рис. 14).

Результаты решения модельных задач с более сложными по сравнению с (6.38) ядрами уравнения (6.37) и функциями $\varphi(y)$ в виде многоугольников, а также набора пилообразных импульсов подтверждают эффективность описанного алгоритма.

§ 7. Экономичная итерационная схема с регуляризацией

В заключение рассмотрим один удобный итерационный алгоритм, предложенный независимо Мартине [327] и А. В. Кряневым [110, 111] и в идейном отношении весьма близкий к тихоновскому. В принятых обозначениях он реализуется в соответствии с формулой

$$(K^*K + \alpha\Omega)\varphi^{(n)} = \alpha\Omega\varphi^{(n-1)} + K^*f. \quad (6.42)$$

В работах [110, 111] доказана сходимость итерационной схемы (6.42), рассмотрен возможный (хотя и трудно воплощаемый на практике) способ обрыва процедуры, а также произведено сопоставление предлагаемой схемы с другими, ранее известными по суммарному числу эквивалентных сложений (ЭС)¹⁾. Это сопоставление свидетельствует о больших преимуществах схемы (6.42) как с точки зрения затрат машинного времени, так и получения (при прочих равных условиях) более точных результатов расчета.

А. Е. Булышев и Г. А. Ведерников [24], выбирая число n по невязке $\|K\varphi_\alpha^{(n)} - f_\delta\|_{L_2} \simeq \delta$, сравнивали в численных экспериментах схему (6.42) со стандартной процедурой тихоновской регуляризации. Как установлено в [24], выбору α в методе Мартине — Крянева можно предъявлять более мягкие требования. Необходимо, чтобы параметр α не оказался слишком заниженным; завышение α по сравнению с его оптимальным значением не столь существенно, ибо это отразится лишь в увеличении числа итераций. Вполне приемлемым условием выбора α может служить следующее:

$$\|K^*K\|_{L_2} \simeq \alpha\|\Omega\|_{L_2}; \quad (6.43)$$

для той же цели пригодны формулы (6.9). Несомненными достоинствами схемы (6.42) являются ее простота, быстродействие, высокая помехоустойчивость и возможность гибкого варьирования расчетной процедуры за счет изменения α и числа итераций.

Отметим, что к итерационной схеме типа (6.42) можно прийти путем предельного перехода $t \rightarrow \infty$ в решении не-

¹⁾ При введении понятия числа ЭС обычно принимается, что ЭВМ в среднем тратит на умножение столько же времени, сколько на 2 сложения.

стационарного эволюционного уравнения, подробно рассматриваемого, например, в [133]. В самом деле, исходному операторному уравнению можно поставить в соответствие следующую задачу Коши:

$$\partial\varphi/\partial t = -K^*K\varphi + K^*f, \quad \varphi(t=0) = \mu, \quad (6.44)$$

которую удобно решать численно, например методом Рунге — Кутты [374], либо с помощью итерационных схем: явной

$$\varphi^{(n)} = \varphi^{(n-1)} - \tau_{n-1}(K^*K\varphi^{(n-1)} - K^*f), \quad (6.45)$$

или более устойчивой неявной

$$\varphi^{(n)} = (K^*K + \tau_{n-1}^{-1}E) (\tau_{n-1}^{-1}\varphi^{(n-1)} + K^*f), \quad (6.46)$$

где τ_n — шаг по времени, E — единичный оператор. Формуле (6.42), очевидно, соответствует обобщение: $\tau_{n-1}^{-1}E \rightarrow \alpha\Omega$.

Л. Л. Фрумин ²⁾ обратил внимание на то, что если рассматривать φ как функцию, зависящую от лапласовских переменных α и t , то можно установить простую связь между схемой регуляризации по Тихонову и эволюционным уравнением типа (6.44). Действительно, перейдем в комплексную плоскость: $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ и представим тихоновский алгоритм в виде уравнения, позволяющего найти аналитическую в этой комплексной плоскости функцию $\varphi(\alpha)$:

$$(K^*K + \alpha\Omega)\varphi(\alpha) = K^*f. \quad (6.47)$$

Поделим обе части уравнения (6.47) на α и, совершив преобразование Лапласа: $\varphi(\alpha) \rightarrow \tilde{\varphi}(t)$, получим

$$\Omega(\partial\tilde{\varphi}/\partial t) + K^*K\tilde{\varphi} = K^*f, \quad (6.48)$$

$$\text{где } \tilde{\varphi}(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\alpha_0 - i\infty}^{-\alpha_0 + i\infty} \alpha^{-1}\varphi(\alpha) \exp(\alpha t) dt. \quad (6.49)$$

Видно, что (6.44) есть частный вид (6.48), когда оператор Ω вырождается в единичный.

²⁾ Работа не опубликована.

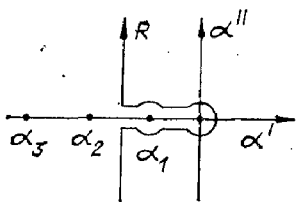


Рис. 15. Схема обхода особых точек при получении уравнения (6.51).

Аналитическая функция $\varphi(\alpha)$ имеет конечное число полюсов в точках α_k , которые являются корнями уравнения

$$\det \|K^*K + \alpha\Omega\| = 0. \quad (6.50)$$

Если операторы K^*K и Ω коммутируют, то величины α_k вещественные и неотрицательные; таким образом, подынтегральное выражение в (6.49) имеет особенности в нуле и в точках α_k . Сдвигая контур интегрирования в сторону отрицательных α' , приходим к ситуации, схематически изображенной на рис. 15: в силу появления множителей типа $\exp(\alpha_k t)$ достаточно ограничиться максимальным корнем α_1 . Следовательно, асимптотическое выражение $\tilde{\varphi}(t)$ таково:

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\alpha = 0) + R \exp(\alpha_1 t), \quad \alpha_1 < 0. \quad (6.51)$$

Если далее подставить (6.51) в выражение критерия невязки

$$\|K\tilde{\varphi} - f_\delta\| = \delta, \quad (6.52)$$

то получим: $\|KR\| \exp(\alpha_1 t) = \delta$, в результате чего для числа итераций $n = t/t_0$ имеет место оценка:

$$n = -(|\alpha_1|t_0)^{-1} \ln [\delta/\|KR\|]. \quad (6.53)$$

Таким образом, n логарифмически зависит от уровня погрешности правой части δ .

При конечном шаге t_0 отличие итерационной схемы Мартине — Крянева от алгоритма Тихонова выявляется с помощью первого дифференциального приближения: в правой части (6.48) возникает член вида $\{-t_0\Omega(\partial^2\tilde{\varphi}/\partial t^2)\}$, а преобразование Лапласа дает выражение

$$(K^*K + \alpha\Omega)\varphi(\alpha) + t_0\Omega[\alpha^2\varphi(\alpha) - \partial\varphi(\alpha = 0)/\partial t] = K^*f. \quad (6.54)$$

Его можно интерпретировать как замену обычного стабилизатора Тихонова Ω некоторым «эффективным».

Остановимся еще на результатах численной реализации итерационной схемы Мартине — Крянева. Заметим,

что пример, приводимый в работе [111], вряд ли может служить хорошей иллюстрацией возможностей этого алгоритма, поскольку А. В. Крянев воспроизвел элементарный пример Филлипса, который был рассмотрен в гл. 5 (см. уравнение (5.24) и далее). Однако алгоритм Филлипса (5.23) при тщательном согласовании параметра α с дисперсией шума дает в этом случае практически безукоризненное восстановление отрезка гармонической функции с таким же (разностным) ядром.

В работе [25] схема Мартине — Крянева применялась для решения значительно более сложной задачи, часто возникающей при диагностике газовых и плазменных сред методами абсорбционной спектроскопии.

Опишем кратко физическую сторону задачи, соответствовавшей эксперименту [2]. Необходимо было повысить точность измерения частотного профиля оптической плотности $\tau(\nu)$ для изотопов ^{39}K и ^{87}Rb , присутствовавших в виде паров в термостатированной кювете в смеси с буферными газами азотом и криптоном. Излучение резонансных линий ^{39}K и ^{87}Rb , возбуждаемых в безэлектродных лампах типа Белла — Блюма, пропускалось через кювету и затем регистрировалось либо простым эталоном Фабри — Перо (для линий калия), либо мультиплексом (для линий рубидия). Аппаратный контур, —определенный с помощью одночастотного стабилизированного гелий—неонового лазера, был близким к дисперсионному с шириной 290 МГц для простого эталона и 130 МГц для мультиплекса. Измеряемые спектральные профили $I_1(\nu)$ (для $\tau = 0$) и $I_2(\nu)$ (для $\tau \neq 0$) связаны с $\tau(\nu)$, аппаратным контуром $A(\nu)$, и истинным профилем просвечивания $I(\nu)$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} I_1(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(\nu - \nu') I(\nu') d\nu', \\ I_2(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu - \nu') I(\nu') \exp[-\tau(\nu')] d\nu'. \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

В силу сложности восстановления $\tau(\nu)$ по известным I_1 , I_2 и A среди экспериментаторов получил распространение следующей грубой прием: принимается, что за счет присутствия функции $A(\nu)$ в обоих подынтегральных выражениях (6.55) влияние ее на $\tau(\nu)$ незначительно, т. е. она

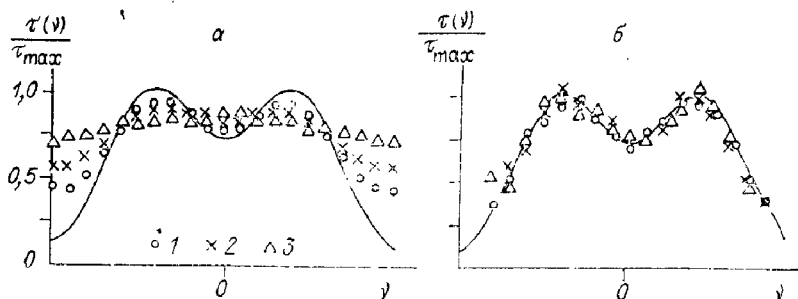


Рис. 16. Восстановление профиля оптической плотности $\tau(v)$ с использованием формулы (6.56) (а) и методом Мартине — Крыева (б).

$\beta = 0,25$ (1); $0,50$ (2); $1,2$ (3).

приближенно может быть заменена δ -функцией Дирака, после чего $I(v')$ сокращается и

$$\tau(v) = \ln[I_1(v)/I_2(v)]. \quad (6.56)$$

Ясно, что при проведении прецизионных измерений в поглощающем газе необходимо, во-первых, выяснить границы применимости (6.56) и, во-вторых, разработать эффективный алгоритм восстановления $\tau(v)$ из (6.55) для ситуаций, когда формула (6.56) заведомо непригодна.

Приведем характерные результаты модельных расчетов, для которых функции $I(v)$, $\tau(v)$ и $A(v)$ задавались в следующем виде:

$$\begin{aligned} I(v) &= \exp\{-\ln 2 \cdot (v-4)^2/\Delta_I^2\} + \exp\{-\ln 2 (v+4)^2/\Delta_I^2\}, \\ \tau(v) &= 0,5I(v), \\ A(v) &= (\Delta_A/2\pi)(v^2 + \Delta_A^2/4)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Важным безразмерным параметром задачи является отношение $\beta = \Delta_A/\Delta_I$, которое в расчетах варьировалось в пределах $0,1 \leq \beta \leq 1,5$. Результаты применения приближения (6.56) показаны на рис. 16, а. В случае, когда восстанавливаемая функция шире аппаратной в 4 раза ($\beta = 0,25$), зависимость $\tau(v)$ получается уже сильно заглаженной, крылья контура линии поглощения восстанавливаются плохо, значительной является ошибка определения полуширины функции $\tau(v)$ и возможно смещение ее максимумов. Для больших значений β вообще исчезает информация о реальной структуре коэффициента поглощения.

Расчет по полной системе уравнений (6.55) производился по итерационной схеме Мартине — Крянева. К функциям $I_1(v)$ и $I_2(v)$ добавлялись случайные нормально распределенные погрешности с коэффициентом вариации 1% в каждой точке. Решение системы уравнений (6.55) по сравнению с классической задачей Рэлея о редукции к идеальному прибору, где обычно ядро интегрального уравнения задается аналитическим выражением, значительно сложнее. В данном случае ядро второго уравнения системы содержит функцию $I(v)$, несущую в себе как ошибки эксперимента, так и ошибки метода решения первого уравнения. Однако, как следует из расчетов (см. рис. 16, б), примененная схема позволяет вполне надежно передать структуру контура оптической плотности даже тогда, когда ширина аппаратной функции несколько превышает ширину восстанавливаемого профиля.

Г Л А В А 7

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Привлечение в той или иной форме аппарата математической статистики для решения обратных некорректных задач получило весьма широкое распространение в самых разнообразных приложениях, в том числе в диагностике плазмы. При прочих равных условиях статистические схемы регуляризации по некоторым причинам больше, нежели «детерминированные», импонируют физику-экспериментатору. Во-первых, при обработке опытных данных как для устойчивых, так и для неустойчивых задач использование вероятностных понятий, по существу, неизбежно. Поэтому, если вероятностный способ можно применить при учете в задаче имеющейся априорной информации, нахождении решения, оценке его погрешности и т. п., то единообразный математический аппарат, безусловно, предпочтительнее.

Во-вторых, статистические способы позволяют независимо от процедуры решения и еще до получения решения как такового оценить информативность эксперимента,

осуществить оптимальное планирование всех измерительных этапов, включая выбор средств и методов измерений. Совершенно очевидно, насколько это важно в задачах диагностики плазмы.

В-третьих, как показывает практика, вероятностный способ оказывается более гибким и удобным с точки зрения учета в априорном информационном распределении данных предыдущих экспериментов, а также различных предположений об искомой функции, трудно выразимых на языке теории множеств. Статистическая регуляризация обычно легко ассоциируется с методами нелинейного программирования.

В-четвертых, статистическая регуляризация естественным образом сочетается со статистическими свойствами многих важных физических процессов, протекающих в плазме и потоках нагретых газов, таких, как турбулентность, нелинейные волны, флуктуации параметров, обуславливающие стохастический характер рассеяния, развитие тех или иных типов плазменных неустойчивостей и т. п. [83, 108, 112, 145, 151].

В-пятых, статистические способы регуляризации часто удается с успехом применить для решения сложных нелинейных задач [35, 230].

Однако, говоря обо всех этих преимуществах, нельзя забывать, что, по крайней мере в настоящее время, уровень строгости обоснования большинства практикуемых алгоритмов статистической регуляризации уступает тому, который достигнут, например, в методе Тихонова, методах квазиобращения, поиска квазирешений. Правда, усилия многих математиков как раз и направлены на создание прочного теоретического фундамента применительно к статистическим способам регуляризации. В этой главе мы кратко опишем те из упомянутых способов, которые уже положительно зарекомендовали себя в вычислительной практике и продолжают совершенствоваться.

§ 1. Учет статистических характеристик в рамках общих методов регуляризации

Один из простейших и наиболее очевидных способов включения статистических характеристик в тихоновский алгоритм регуляризации состоит в конкретизации ста-

билизирующего фактора (3.15). Напомним, что этот фактор содержал член $aQ(\omega)$, где выбор обоих множителей a и Q оставался достаточно произвольным. Легко показать, что, по крайней мере для гауссовых процессов, когда исчерпывающим является учет статистических характеристик двух видов (корреляционных и взаимокорреляционных функций), этот произвол легко устранить [380].

Рассмотрим задачу так называемой оптимальной линейной фильтрации. Если некоторый оператор K преобразует случайный входной сигнал $\varphi(x)$ так, что в результате имеет место реализация случайной функции $f(x)$, то упомянутая задача состоит в поиске такого воздействия на $f(x)$, при котором формируется функция $\psi_1(x)$, имеющая в той или иной вероятностной метрике наименьшее отклонение от заданной функции $\psi(x)$. Постановке обратной задачи, очевидно, соответствует равенство $\psi = \varphi$. Запишем выражение для функционала среднего квадрата ошибки в точке x :

$$\sigma_{\psi}^2 = \langle [\psi_1(x) - \psi(x)]^2 \rangle, \quad (7.1)$$

где знак $\langle \dots \rangle$ означает математическое ожидание. Поскольку $\psi_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, y) f(y) dy$, H — искомый оператор фильтрации, нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(z, y) H(x, y) H(x, z) dy dz - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, z) R_{f\psi}(z, x) dz + R_{\psi}(x, x). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь $R_f(z, y) = \langle f(z)f(y) \rangle$; $R_{\psi}(x, x) = \langle \psi(x)\psi(x) \rangle$ — корреляционные, а $R_{f\psi}(z, x) = \langle f(z)\psi(x) \rangle$ — взаимокорреляционные функции соответствующих процессов. Минимум функционала σ_{ψ}^2 при варьировании $H(x, z)$ определяется решением уравнения Винера—Хопфа [380]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_f(z, y) H(x, y) dy = R_{f\psi}(z, x), \quad (7.3)$$

которое для стационарных процессов принимает форму обычного уравнения свертки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_f(y) H(x-y) dy = R_{\psi f}(x). \quad (7.4)$$

Обратимся теперь к обратной задаче

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) \varphi(y) dy + \xi(x) = f(x), \quad (7.5)$$

где $\xi(x)$ — аддитивный стационарный шум, присутствующий на входе фильтра. Теперь $\psi = \varphi$. Нетрудно подсчитать функции $R_f(y)$ и $R_{\psi f}(x) = R_{\varphi f}(x)$, фигурирующие в (7.4), а затем найти их фурье-трансформанты:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_f(\omega) &= |\tilde{K}(\omega)|^2 \tilde{R}_{\varphi}(\omega) + \tilde{R}_{\xi}(\omega), \\ \tilde{R}_{\varphi f}(\omega) &= \tilde{R}_{\varphi}(\omega) \tilde{K}^*(\omega). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Поскольку, с другой стороны, из (7.4) следует, что $\tilde{H}(\omega) = \tilde{R}_{\varphi f}(\omega) / \tilde{R}_f(\omega)$, то согласно (7.6) находим

$$\tilde{H}(\omega) = \tilde{K}^*(\omega) [|\tilde{K}(\omega)|^2 + \tilde{R}_{\xi}(\omega) / \tilde{R}_{\varphi}(\omega)]^{-1} \quad (7.7)$$

Наконец, сравнивая результат (7.7) с формулами (3.14) и (3.15), получаем, что

$$aQ(\omega) = \tilde{R}_{\xi}(\omega) / \tilde{R}_{\varphi}(\omega). \quad (7.8)$$

Вообще можно утверждать, что среди всех функций $Q(\omega)$ существует такая $Q_0(\omega) = \tilde{R}_{\xi}(\omega) / a\tilde{R}_{\varphi}(\omega)$, при которой однопараметрическое семейство регуляризирующих операторов $R_Q[f, a]$ содержит оператор оптимальной винеровской фильтрации [217]. Отсюда следует, что данный оператор непрерывен по f на всякой заданной точной правой части и устойчив к ее малым изменениям. Практический вывод, вытекающий из этого утверждения, заключается в возможности замены оператора оптимальной фильтрации близким к нему, например более простым по структуре или связанным с привлечением меньшей априорной информации, чем полная информация об отношении шум/сигнал (7.8).

С учетом (7.8) выражение для минимального значения среднего квадрата ошибки приобретает вид (ср. с

формулой (3.9):

$$\sigma_{\varphi \min}^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{R}_{\xi}(\omega) [|\tilde{K}(\omega)|^2 + \tilde{R}_{\xi}(\omega)/\tilde{R}_{\varphi}(\omega)]^{-1} d\omega. \quad (7.9)$$

Во многих прикладных задачах передаточная функция $\tilde{K}(\omega)$ точно неизвестна и приходится предполагать, что существует некоторое множество случайных функций $\tilde{K}(\omega)$ с заданным распределением. При таком предельно статистическом подходе возникает задача поиска такой $\langle \tilde{K}(\omega) \rangle$, которая обеспечивала бы $\sigma_{\varphi \min}^2$, усредненную по множеству $\tilde{K}(\omega)$. Эта задача была решена Слепяном [357].

Использованное допущение об аддитивности шума $\xi(x)$ оправдано далеко не всегда. Например, в задачах реставрации фотографических изображений шум, связанный с гранулярностью фотопленки, носит скорее мультипликативный, нежели аддитивный, характер [285]. В диагностических приложениях, когда приходится восстанавливать акустические или радиосигналы, обычно следует принимать во внимание случайные флуктуации усиления в канале приема сигнала, которые также являются мультипликативной помехой. Тогда вместо (7.5) исходным следует считать уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) w(y) \varphi(y) dy + \xi(x) = f(x), \quad (7.10)$$

где $w(y)$ — стационарный шумовой процесс со средним значением m_w , не коррелированный с $\varphi(y)$; все четыре случайные функции $K(x)$, $w(x)$, $\varphi(x)$ и $\xi(x)$ предполагаются статистически независимыми, а процессы — стационарными. Опуская выкладки, несколько более громоздкие, чем предыдущие, но по существу повторяющие их [35, 226], запишем окончательное выражение для передаточной функции оптимального винеровского фильтра

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega) &= A/B, \\ A &= m_w \tilde{R}_{\varphi}(\omega) \langle \tilde{K}^*(\omega) \rangle, \\ B &= \langle |\tilde{K}(\omega)|^2 \rangle \{ \tilde{R}_w(\omega) \otimes \tilde{R}_{\varphi}(\omega) \} + \tilde{R}_{\xi}(\omega). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Обратим внимание на то, что если среднее значение мультипликативной помехи $m_w = 0$, то и $\tilde{H}(\omega) = 0$, т. е. лучшей оценкой входного сигнала является $\varphi(x) = 0$. Наконец, заметим, что вместо свертки вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) \varphi(y) dy = f(x)$$

(с соответствующими добавлениями случайных функций (7.5), (7.10)) мы могли бы проводить все рассуждения и выкладки и для иных уравнений сверточного типа [217]:

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x-y) \varphi(y) dy &= f(x), \\ \int_0^{\infty} K(x/y) \varphi(y) dy/y &= f(x), \\ \int_0^{\infty} J_n(xy) \varphi(y) dy &= f(x), \end{aligned} \quad (7.12)$$

только вместо преобразований Фурье следует соответственно применять преобразования Лапласа, Меллина и Бесселя.

В. Н. Судаков и Л. А. Халфин [205], рассматривая задачу Коши для уравнения Лапласа, предложили выделять помеху $\xi(x)$, являющуюся реализацией стационарного случайного процесса, из данных Коши и выяснили условие, при котором эта помеха оказывает на решение $\varphi(x)$ малое (в среднем) влияние: необходима малость функции автокорреляции в гильбертовом пространстве с экспоненциальным весом. В более общей форме статистический подход к решению некорректных задач был развит М. М. Лаврентьевым и В. Г. Васильевым [119]. Этот подход фактически эквивалентен методу поиска квазирешений. В свою очередь, обе постановки [119, 205] тесно примыкают к задаче о декодировании, возникающей в связи с общей формулировкой основной теоремы Шеннона в теории информации.

Статистический подход, предложенный в [119], оказался очень плодотворным и развивался в дальнейшем рядом авторов. Так, Л. А. Вайнштейн [32] применил его для нахождения устойчивого решения плохо обусловлен-

ных систем уравнений, правая часть которых искажена случайным возмущением с известными характеристиками; В. А. Морозов [146, 147], также используя подход [119], разработал достаточно общий способ вычисления оптимального регуляризатора для линейных вполне непрерывных операторов K , когда правая часть f уравнения $K\varphi = f$ задана с ошибкой, которая является случайным процессом в гильбертовом пространстве. В. А. Морозовым исследована точность оптимальной регуляризации для различных классов решений и погрешностей, а также указаны способы реализации оптимальных решений, дающих погрешность, одинаковую по порядку с оптимальной. Таким свойством, в частности, обладает однопараметрический метод регуляризации Тихонова. Эффективный алгоритм построения приближений к результатам оптимальной фильтрации в смысле [146], который: а) основан на методе тихоновской регуляризации; б) не требует набора большой статистики результатов измерений; в) не связан с наличием равномерной сетки; г) легко обобщается на многомерный случай, разработан В. Я. Арсениным и Н. Б. Зябревым [11].

А. Б. Бакушинский [16] распространил метод регуляризации Тихонова на общий класс уравнений $K\varphi = f$ в гильбертовом пространстве со случайным линейным оператором K . В работе В. И. Лебедева [125] строится алгоритм решения условно-корректных задач на основе использования энтропийных и конструктивных характеристик компактных множеств. В подходе В. И. Лебедева основное операторное уравнение $K\varphi = f$ преобразуется к такой форме, когда оператор приобретает δ -свойства. Информационный подход к оценке снизу погрешности решения операторных уравнений 1-го рода предложен в работе [161]; метод тихоновской регуляризации с точки зрения выделения полезной информации в задачах теории управления рассмотрен В. В. Петровым и А. С. Усковым [162].

Отметим еще важную в общетеоретическом плане работу [157], в которой рассмотрены статистические аспекты решения интегральных уравнений 1-го рода

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (7.13)$$

когда правая часть $f(x)$ задана со случайной погрешностью, ядро $K(x, y)$ непрерывно, а интегральный оператор в (7.13) действует из пространства C в пространство L_2 . Для разностной аппроксимации (7.13) исследуется уравнение максимального правдоподобия (см., например, [105]). Как известно, в данном случае необходимо ввести в рассмотрение плотность условной вероятности $P(\mathbf{f}|\varphi)$, где размерности векторов \mathbf{f} и φ , отвечающих функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$, составляют соответственно N и M ($M \leq N$). Пусть $P_{\xi}(\mathbf{f} - K\varphi)$ — априорная плотность вероятности вектора шума; тогда

$$P(\mathbf{f}|\varphi) = P_{\xi}(\mathbf{f} - K\varphi). \quad (7.14)$$

В теории статистических оценок [34] при известной плотности условной вероятности $P(\mathbf{f}|\varphi)$ исследуется возможность найти такой алгоритм, который позволил бы по наблюдаемому вектору \mathbf{f} определить оптимальную оценку φ_{opt} искомого вектора φ . Для этой цели вводят так называемую штрафную функцию $\Pi(\varphi, \varphi_{\text{opt}})$, которую обычно считают зависящей только от погрешности ε , т. е. $\Pi(\varphi, \varphi_{\text{opt}})$ оказывается лишь функцией одной переменной $\Pi(\varepsilon)$. В приложениях особенно распространены квадратичная $\Pi(\varepsilon) = \varepsilon^2$, линейная $\Pi(\varepsilon) = |\varepsilon|$ и индикаторная

$$\Pi(\varepsilon) = \begin{cases} \Delta^{-1}, & \varepsilon < -\Delta/2; \varepsilon > \Delta/2; \\ 0, & -\Delta/2 \leq \varepsilon \leq \Delta/2 \end{cases}$$

штрафные функции. В случае, если: а) какие-либо априорные сведения о распределении вероятностей $P(\varphi)$ отсутствуют и б) нет оснований для предпочтительного выбора той или иной штрафной функции $\Pi(\varepsilon)$, для оценки φ_{opt} остается использовать лишь метод максимального правдоподобия. Именно, выбирать следует такой вектор φ , который с наибольшей вероятностью обусловит появление в задаче данного вектора \mathbf{f} . Необходимое (но не достаточное) условие такого выбора имеет вид

$$\partial \{\ln P(\mathbf{f}|\varphi)\} / \partial \varphi |_{\varphi=\varphi_{\text{opt}}} = 0. \quad (7.15)$$

Авторы работы [157], анализируя (7.15), показали, что при поиске оценок максимального правдоподобия можно сформулировать такую вариационную задачу, которая является разновидностью метода регуляризации Тихонова. Появляющийся при этом неопределенный

множитель Лагранжа — аналог параметра регуляризации α — находится на основе статистических критериев, в частности критерия χ^2 . Исследовано асимптотическое поведение оценки $\varphi(x)$ при $N \rightarrow \infty$, а возможности алгоритма продемонстрированы на примере решения уравнения Абеля.

§ 2. Метод максимума энтропии

Только что упомянутый переход от стандартной задачи отыскания оценок максимального правдоподобия к вариационной задаче с регуляризацией решения можно, как показал Фриден [291], осуществить по-другому. В основу рассмотрения при этом следует положить дискретную статистическую модель, согласно которой исходное операторное уравнение преобразуется в линейную систему

$$\sum_{m=1}^M K_{nm} \varphi_m + \xi_n = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (7.16)$$

$$\sum_{m=1}^M \varphi_m = \varphi_\Sigma. \quad (7.17)$$

Тогда отношению $p_m = \varphi_m / \varphi_\Sigma$ можно придать вероятностный смысл и построить функционал энтропии

$$H = - \sum_{m=1}^M p_m \ln p_m = -a \sum_{m=1}^M \varphi_m \ln \varphi_m + b, \quad (7.18)$$

где a и b — константы. Джейнс [308], исследуя задачу о восстановлении плотности вероятности $p(x)$ по M ее известным моментам $\{q_m\}$, когда

$$q_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m p(x) dx, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (7.19)$$

показал, что наименее смещенную оценку $p(x)$ дает лишь функция, которая, соответствуя (7.19), имеет при этом

максимум энтропии $H = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx$. Естественно

поэтому и в данном случае воспользоваться принципом

максимума энтропии и для нахождения φ_m записать условие

$$H = \max \left\{ - \sum_{m=1}^M \varphi_m \ln \varphi_m \right\} \quad (7.20)$$

(конкретные значения констант a и b при этом несущественны).

Отыскивать максимум в (7.20) можно по-разному; несколько вариантов такого поиска рассмотрено в обзорной статье [313]. Довольно перспективный подход к задаче был предложен М. З. Тараско [209]: в данном случае вероятностный смысл придается сразу обоим функциям: φ и f , так что

$$\sum_n^N f_n = \sum_m^M \varphi_m = 1, \quad f_n \geq 0, \quad \varphi_m \geq 0,$$

а $\{K_{nm}\}$ является стохастической матрицей, где $K_{nm} \geq 0$ для всех n и m . В этом случае поиск максимума в (7.20) можно осуществлять последовательными приближениями согласно формуле

$$\varphi_m^{(s+1)} = \varphi_m^{(s)} \frac{\sum_n^N K_{nm} f_n}{\sum_m^M K_{nm} \varphi_m^{(s)}}, \quad (7.21)$$

где s — номер итерации.

Подход Фридена [291] обладает значительно большими возможностями, чем те, которые связаны с непосредственным решением системы уравнений (7.16) при учете условия (7.20).

В самом деле, введем, следуя [291], интервал допустимой неопределенности $\pm \Delta\varphi$ в находимых значениях φ_m . Тогда от φ_m и φ_Σ можно перейти к целым числам: $\varphi_m^0 = \lceil \varphi_m (\Delta\varphi)^{-1} \rceil$; $\varphi_\Sigma^0 = \varphi_\Sigma (\Delta\varphi)^{-1}$. Для дискретного набора чисел $\{\varphi_m^0\}$ вероятность реализации распределения этих чисел по M ячейкам, очевидно, такова:

$$W_\varphi (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_M^0) = \varphi_\Sigma^0! / \prod_{m=1}^M \varphi_m^0! \quad (7.22)$$

Учитывая, что φ_Σ^0 достаточно велико, и используя в (7.22) формулу Стирлинга, находим

$$\ln W_\varphi (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M) = - (\Delta\varphi)^{-1} \sum_{m=1}^M \varphi_m \ln \varphi_m. \quad (7.23)$$

Аналогичные рассуждения следует повторить и для шумовой составляющей в (7.16), однако сначала необходимо искусственно ввести в задачу такое компенсирующее смещение $B \geq 0$, чтобы логарифмировалась всегда только положительная величина: $\gamma_n = \xi_n + B$, $\gamma_n > 0$. Для γ_n в полном соответствии с (7.23) получим

$$\ln W_\gamma(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = -(\Delta\gamma)^{-1} \sum_{n=1}^N \gamma_n \ln \gamma_n. \quad (7.24)$$

Введем еще фактор неопределенности отношения сигнал/шум:

$$\rho = (\Delta\Phi)/(\Delta\gamma), \quad (7.25)$$

который может выступать далее как свободный параметр.

Таким образом, мы приходим к задаче о нахождении $(M + N)$ неизвестных $\{\varphi_m\}$, $\{\gamma_n\}$ по $(N + 1)$ уравнению ((7.16) и (7.17)). Очевидно, в этом случае можно говорить лишь о максимально правдоподобном решении, для которого

$$W_\gamma W_\varphi \rightarrow \max; \quad (7.26)$$

шум в данном случае считается некоррелированным. Учитывая выражения (7.16), (7.17) и (7.23), (7.24) и вводя неопределенные множители Лагранжа, приходим к полному уравнению для максимума энтропии:

$$-\sum_{m=1}^M \varphi_m \ln \varphi_m - \rho \sum_{n=1}^N \gamma_n \ln \gamma_n - \sum_{n=1}^N \lambda_n \left[\sum_{m=1}^M K_{nm} \varphi_m + \gamma_n - B - f_n \right] - \lambda_{N+1} \left(\sum_{m=1}^M \varphi_m - \varphi_\Sigma \right) = \max. \quad (7.27)$$

Производя далее дифференцирование (7.27): $\partial/\partial\varphi_m$, $\partial/\partial\gamma_n$ при всех n и m , получим отдельные решения для каждого из массивов неизвестных

$$\varphi_m = \exp \left[-1 - \lambda_{N+1} - \sum_{n=1}^N K_{mn} \lambda_n \right], \quad (7.28)$$

$$\gamma_n = \exp [-1 - \lambda_n / \rho]. \quad (7.29)$$

Неизвестные $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N+1}$ определяются уравнениями (7.16) и (7.17), которые формально можно также «получить» из (7.27), дифференцируя по $\{\lambda_n\}$ и λ_{N+1} ; в (7.16) вместо ξ_n , очевидно, нужно иметь в виду разность $(\gamma_n - B)$.

Система из $(N + 1)$ нелинейного уравнения для множителей Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$, найденная после подстановки (7.28), (7.29) в (7.16), (7.17), может быть решена, например, методом Ньютона—Рафсона.

Рассмотрим кратко особенности метода максимума энтропии.

I. Метод автоматически обеспечивает получение положительного решения φ_m ; из формулы (7.28), кроме того, следует, что

$$d^k \varphi(x) / dx^k \sim \varphi(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7.30)$$

т. е. в тех местах, где имеется практически нулевой фон, $\varphi(x)$ вообще не может осциллировать либо осциллирует слабо. В связи с этим метод Фридена дает особенно хорошие результаты для объектов, содержащих большое число импульсов и имеющих нулевые значения везде, кроме конечного числа точек.

II. Применение критерия максимума энтропии эквивалентно сглаживающему воздействию на функцию $\varphi(x)$. Действительно, из выражения (7.23) видно, что если сближать два значения: φ_m и φ_i (это и выражает тенденцию к сглаживанию), то энтропия H возрастает. Следовательно, H_{\max} способствует получению максимально гладкой оценки решения.

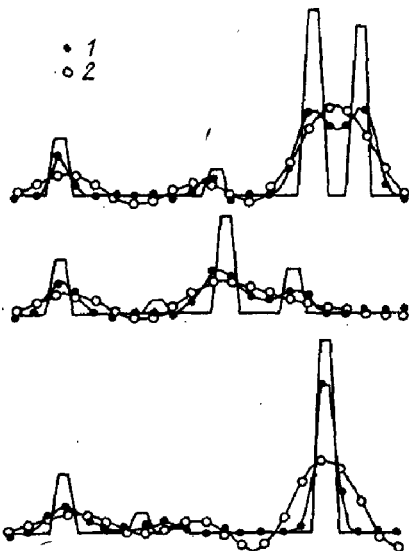
III. Параметр ρ (7.25) по своему смыслу является сходным с параметром регуляризации α Филлипса—Тихонова. В частности, чем больше ρ , тем большее значение придается максимизации энтропии шума $\{\gamma_n\}$ и, следовательно, его сглаживанию.

IV. Выбор компенсирующего сдвига B также влияет на степень сглаживания решения $\varphi(x)$. Легко видеть, что это влияние сказывается через изменение абсолютных величин множителей Лагранжа $\{\lambda_n\}$: их уменьшению соответствует большее заглаживание решения.

Таким образом, алгоритм Фридена обладает большой гибкостью с точки зрения регуляризующих возможностей и по самой своей структуре должен давать достаточно устойчивые результаты восстановления.

На рис. 17 показаны примеры восстановления набора импульсов трапециевидальной формы при значении $\rho = 1$. Сплошной линией изображена исходная функция $\varphi(x)$. Правая часть $f(x)$, не показанная на рисунке, генерировалась с помощью ЭВМ с использованием аппаратной функ

Рис. 17. Сравнение метода максимума энтропии при вводе в правую часть 5%-ной погрешности (1) с идеальной инверсной фильтрацией (2) — без ввода погрешности.



ции дифракционного типа и искажалась равномерным случайным шумом с максимальной относительной ошибкой 5%. Для сравнения дан результат идеальной инверсной фильтрации (т. е. в отсутствие шума).

Особенно явно проявились достоинства алгоритма Фридена в последнее время при решении двумерных и трехмерных задач томографии и реставрации изображений [259, 267, 272, 292, 331]. Важный теоретический результат получен Лентом [322], сформулировавшим условия, при которых наиболее широко применяемый в томографии метод ART (в мультипликативном варианте, см. гл. 9) сводится к решению, характеризуемому максимумом энтропии. Свойства сходимости алгоритма, являющегося двумерным обобщением только что описанного, исследовал Минербо [331]; он же подробно изучил трехмерный вариант метода максимума энтропии. Важный практический вывод, следующий из [331] и некоторых предшествовавших работ американских авторов, состоит в том, что, во-первых, метод Фридена применительно к задачам томографии не требует использования большого числа направлений наблюдения (ART в тех же условиях порождает неприемлемые артефакты); во-вторых, для J направлений и дискретизации одной двумерной проекции на $N \times N$ ячеек в методе Фридена для трехмерной томографии необходима машинная память в $2JN^2$ слов, в то время как в методе ART — $(N^3 + JN^2)$ слов.

В рамках метода максимума энтропии альтернативой метода Фридена [227] является метод, разработанный Бургом. В данном случае выражение для энтропии H строится по иному принципу, без перехода к дискретным величинам. Именно, $\varphi(x)$ можно рассматривать как

квадрат другой функции $\psi(x)$, для которой предполагаются известными два первых ее момента. Если вернуться к формуле (7.19), то легко убедиться, что максимуму энтропии соответствует решение вида .

$$p(x) = \exp \left[- \sum_{m=1}^M \lambda_m x^m \right], \quad (7.31)$$

где значения λ_m должны удовлетворять уравнениям моментов. Таким образом, энтропия становится известной, и при переходе ко всей оси x наименьшая погрешность будет соответствовать предположению о статистической независимости $\varphi(x)$

$$H_B = \max \left\{ - \int dx \ln \varphi(x) \right\}. \quad (7.32)$$

Как видим, критерии (7.20) и (7.31) различаются множителем $\varphi(x)$ под интегралом, причем в (7.20) наличие такого множителя соответствует классической формуле Шеннона. Однако у более простого выражения (7.32) в силу отсутствия этого множителя имеется серьезное преимущество: решение удается записать в замкнутой форме, избавляющей от необходимости пользоваться итерационной схемой. Например, если в качестве входных данных можно использовать оценки $\{\tilde{\varphi}(\omega_m)\}$, найденные с помощью стандартной процедуры инверсной фильтрации (см. гл. 3), то вариационным аналогом формулы (7.27) будет следующее выражение:

$$- \int_{-X}^X dx \ln \varphi(x) - \sum_{m=1}^M \lambda_m \left[\int_{-X}^X dx \varphi(x) \exp(-ix\omega_m) - \tilde{\varphi}(\omega_m) \right] = \max. \quad (7.33)$$

После серии преобразований получается

$$\varphi(x) = (2X)^{-1} h_{M+1} \left| 1 + \sum_{m=1}^M h_m \exp[-i\pi m (2X)^{-1}(x+X)] \right|^{-2}, \quad (7.34)$$

где h_m — решения системы линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} T(0) & T(\omega_1) & T(\omega_2) & \dots & T(\omega_M) \\ T(\omega_1) & T(0) & T(\omega_1) & \dots & T(\omega_{M-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T(\omega_M) & T(\omega_{M-1}) & \dots & T(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.35)$$

$$\omega_m = m\pi(2X)^{-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M,$$

$T(\omega) = 2\operatorname{Re}\{\tilde{\varphi}(\omega)\exp(-i\omega X)\}$ — промежуточные матричные элементы, вычисляемые по входным данным.

Достоинства метода Бурга состоят в его алгоритмической простоте и экономичности расчетной процедуры; недостатки — в довольно заметной чувствительности к погрешностям входных данных $\tilde{\varphi}(\omega)$ и особенно в отсутствии учета погрешностей даже при обращении свертки и явной записи выражений (7.34) и (7.35). В частности, квадратная матрица в (7.35) априори считается неотрицательно определенной, что, вообще говоря, верно, если только $\tilde{\varphi}(\omega_m)$ не отличаются от истинных, идеализированных значений этих величин. Возможности метода изучены пока недостаточно; неясно, насколько эффективно могут решаться обратные задачи с оператором более общего вида.

§ 3. Поиск байесовских решений

При решении неустойчивых прикладных задач методами статистической регуляризации, пожалуй, наибольшее распространение получили подходы, основанные на минимаксной и байесовской оценочных стратегиях. Укажем в качестве примера на одну из первых работ такого рода [160], где рассматривается задача об оптимальном вычислении линейных функционалов $l(\varphi)$ на решениях уравнения $K\varphi = f$, $\varphi \in \Phi$, $f \in F$, когда K — линейный вполне непрерывный оператор, $\Phi = F$ — гильбертовы пространства, а правая часть f искажена случайным процессом ξ с известными корреляционными характеристиками. Регуляризованные операторные уравнения получаются в рамках как минимаксного, так и байесовского подхода,

причем в первом случае минимизируются искажения от замены истинных значений функционала их оценками в наименее благоприятной ситуации, а во втором — априорно задается корреляционный оператор для искомого решения, находимый из определенных допущений о его гладкости.

Среди оценочных стратегий, применяемых в математической статистике, байесовские стратегии следует считать наиболее предпочтительными [156]. Иногда говорят о так называемых разумных стратегиях, определяемых как такие, для которых не существует лучших вне зависимости от исхода каких бы то ни было случайных событий. При этом доказываем, что каждая «разумная» стратегия является именно байесовской, причем ей поставлено в соответствие некоторое априорное распределение вероятностей $P(\varphi)$. Если, как и ранее (формула (7.14)), $P(f|\varphi)$ — плотность условной вероятности вектора f , соответствующего правой части алгебраизованного операторного уравнения $K\varphi = f$, то формулой Байеса (теоремой гипотез)

$$P(\varphi|f) = P(\varphi)P(f|\varphi) / \int P(\varphi)P(f|\varphi) d\varphi \quad (7.36)$$

будет определяться апостериорная вероятность, непосредственно используемая при нахождении математического ожидания $\langle \varphi \rangle$ и ковариационной матрицы D_φ искомого решения:

$$M_\varphi \equiv \langle \varphi \rangle = \int \varphi P(\varphi|f) d\varphi, \quad (7.37)$$

$$\{D_\varphi\}_{ij} = \int (\varphi_i - M\varphi_i)(\varphi_j - M\varphi_j) P(\varphi|f) d\varphi.$$

Рассмотрим несколько подробнее сомножители, входящие в формулу Байеса (7.36). Плотность условной вероятности $P(f|\varphi)$ — функция $(M + N)$ переменных, характеризующая схему эксперимента, т. е. вид связи между φ и f , а также статистические свойства ошибок измерений (вектор ξ). Чаще всего на практике принимают, что компоненты ξ статистически независимы, распределены по нормальному закону с известной дисперсией (N -мерный вектор с компонентами s_n^2) и нулевым математическим ожиданием, а также включают в себя ошибки алгебраизации исходного уравнения. В этом случае

$$P(f|\varphi) = \prod_{n=1}^N (2\pi s_n^2)^{-1/2} \exp \left[- (2s_n^2)^{-1} \left(f_n - \sum_{m=1}^M K_{nm} \varphi_m \right)^2 \right]. \quad (7.38)$$

В пользу выбора выражения (7.38) в качестве достаточно универсального можно привести некоторые общие соображения [191]. В самом деле, распределение вероятностей полностью определяется набором всех своих моментов. Однако на практике, как правило, известны не все, а только низшие моменты (обычно первые два). При этом независимо от того, какой вид имеет фактическое распределение $P(f|\varphi)$, целесообразно исходить из максимально-энтропийного, т. е. характеризующегося наибольшей свободой выбора структурных вариантов. Таковым как раз является нормальное распределение (7.38).

Необходимо помнить, что при увеличении общего числа экспериментальных отсчетов f_n или при выборе сгущающейся сетки роль корреляционных коэффициентов связи между значениями f_n , вообще говоря, возрастает. Математически это обстоятельство особенно просто можно описать с помощью корреляционной функции стационарного марковского процесса

$$R(x) = s^2 \exp(-a|x|), \quad (7.39)$$

где s^2 — по-прежнему дисперсия процесса, а a — некоторое положительное число [57]. Элементы $R_{nn'}$ ковариационной матрицы имеют вид

$$R_{nn'} = s^2 \exp[-a|n - n'| \Delta x] = s^2 \beta^{|n - n'|}, \quad (7.40)$$

где $\beta = \exp(-a\Delta x)$. Элементы соответствующей обратной матрицы R^{-1} несложно учесть при обобщении выражения (7.38) на случай коррелированных по (7.39) помех.

Согласно формуле Байеса, полная апостериорная информация о векторе φ есть сумма косвенной (экспериментальной) информации, выражаемой функцией $P(f|\varphi)$, и априорной информации $P(\varphi)$. В реальных условиях оба сомножителя с информационной точки зрения далеко не равноценны: основные сведения о φ должны быть сосредоточены в $P(f|\varphi)$, иначе беспредметна сама постановка эксперимента. Если рассматривать $P(f|\varphi)$ как функцию φ , то степень близости ее к δ -функции Дирака будет определяться степень допустимого произвола при задании

$P(\varphi)$. В пределе (« δ -эксперимент») можно положить $P(\varphi) = \text{const}$, т. е. не вводить в задачу никакой нетривиальной априорной информации.

При рассмотрении пересечения двух вероятностных ансамблей (7.36) не исключена ситуация, когда такого пересечения либо вообще не существует, либо имеет место своего рода «игра хвостов» двух распределений, лишенная физического смысла. Причиной подобных осложнений могут оказаться либо чрезмерно большие погрешности измерений, либо сильная корреляция результатов отсчетов, либо, наконец, слишком «волюнтаристский» выбор $P(\varphi)$.

Правильный выбор $P(\varphi)$ — центральная часть процедуры статистической регуляризации с поиском байесовских решений. Как показано в обзоре [221], возможности такого выбора весьма разнообразны. В частности, поиск решения может происходить:

а) в ансамбле, заданном некоторой конечной выборкой (например, при наличии каких-то дополнительных прямых измерений φ_i , уже имеющихся в распоряжении экспериментатора);

б) в ансамбле, характеризуемом корреляционной матрицей;

в) в наиболее узком допустимом ансамбле с учетом различной степени гладкости искомой функции (в данном случае удается дать статистическую интерпретацию методу Филдипса—Туоми, описанному в гл. 5, и улучшить выбор параметра регуляризации в этом методе);

г) в ансамбле, характеризуемом определенной нормой производной любого порядка искомой функции;

д) в так называемом слоистом ансамбле, когда отыскивается не самое гладкое решение, а решение наиболее вероятной гладкости.

Остановимся несколько подробнее на двух последних способах осуществления статистической регуляризации [169]. Воспользуемся сначала априорными соображениями о гладкости искомой функции $\varphi(x)$ и по аналогии со стабилизатором Тихонова (6.5) введем некоторый функционал $\Omega[\varphi(x)]$ как линейную комбинацию норм набора p производных. Укажем примерное ожидаемое значение этого функционала: $\Omega[\varphi(x)] = \Omega_0$, произведем алгебраизацию и обозначим той же буквой Ω полученную симметричную неотрицательно определенную матрицу. Тогда

априорная информация будет задана в виде

$$\int (\varphi, \Omega \varphi) P(\varphi) d\varphi = \Omega_0. \quad (7.41)$$

Кроме того, необходимо условие, позволяющее свести к минимуму дополнительную информацию о $P(\varphi)$, не включенную в (7.41); им, очевидно, будет условие максимума энтропийного интеграла, записанного для вероятности $P(\varphi)$:

$$\max \left\{ - \int P(\varphi) \ln P(\varphi) d\varphi \right\}. \quad (7.42)$$

Таким образом, мы имеем вариационную задачу о поиске максимума (7.42) при условии (7.41) и соблюдении нормировки $\int P(\varphi) d\varphi = 1$. Методом неопределенных множителей Лагранжа получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} P(\varphi) &\equiv P(\varphi|\alpha) = \\ &= (\alpha/2\pi)^{n/2} (\det \Omega)^{1/2} \exp [-(\alpha/2)(\varphi, \Omega \varphi)], \end{aligned} \quad (7.43)$$

где $n = \dim \varphi$, $\alpha = n/\Omega_0$ — множитель Лагранжа, остающийся пока неточно определенным в силу известного произвола в задании Ω_0 . Учтем теперь гауссов закон для плотности условной вероятности $P(f|\varphi)$ (формула (7.38)), но для большей общности введем ковариационную матрицу случайного процесса ξ , стохастизирующего эксперимент, W^{-1} . Тогда после элементарных выкладок найдем искомое апостериорное распределение вероятностей

$$\begin{aligned} P(\varphi|f) &= \text{const} \cdot \exp \left\{ -(1/2)(\varphi, [K^*WK + \alpha\Omega]\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi, K^*Wf) \right\}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

С его помощью по формулам (7.37) немедленно получают математическое ожидание вектора φ , трактуемое как искомое решение, его ковариационная матрица D_φ и дисперсия — диагональный элемент последней:

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle &= (K^*WK + \alpha\Omega)^{-1} K^*Wf, \\ D_\varphi &= (K^*WK + \alpha\Omega)^{-1}, \\ \sigma_i^2 &= (K^*WK + \alpha\Omega)_{ii}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Как уже указывалось, неопределенным здесь продолжает оставаться значение параметра регуляризации α . В работе [184] для поиска α предложен простой итерационный алгоритм, идея которого основана на замене

среднего значения функционала по априорному ансамблю $P(\varphi)$ значением этого функционала для данного шага итерации

$$\alpha^{(l)} = n/(\varphi^{(l-1)}, \Omega\varphi^{(l-1)}), \quad (7.46)$$

причем $\varphi^{(l-1)}$ определяется как среднее по апостериорному ансамблю (7.44), вычисленное с параметром регуляризации $\alpha^{(l-1)}$. В качестве $\varphi^{(0)}$ выбирается вектор \mathbf{f} . Для этого алгоритма характерна быстрая сходимость по α , но, как правило, значение α получается несколько завышенным. Условия сходимости процесса в зависимости от погрешностей эксперимента анализируются в работе [43]. Существуют, однако, способы эффективной корректировки α , позволяющие заметно уточнить результаты расчетов по формулам (7.45). Мы здесь не будем останавливаться на этих более специальных вопросах.

До сих пор рассматривались решения φ , принадлежащие статистическому ансамблю (7.43), характеризованному некоторым конкретным значением α . Если же α считать случайной величиной, описываемой плотностью вероятности $P(\alpha)$, то возникает упомянутое выше понятие слоистого ансамбля. В данном случае

$$P_{\alpha}(\varphi) = \int P(\alpha) P(\varphi) d\alpha = (\det \Omega)^{1/2} \int (\alpha/2\pi)^{n/2} P(\alpha) \times \\ \times \exp[-(\alpha/2)(\varphi, \Omega\varphi)] d\alpha \quad (7.47)$$

и апостериорное распределение будет находиться по обобщенной формуле Байеса

$$P_{\alpha}(\varphi | \mathbf{f}) = \left[\int P(\alpha) P(\varphi | \alpha) P(\mathbf{f} | \varphi) d\alpha \right] \left[\int \int P(\alpha) P(\varphi | \alpha) \times \right. \\ \left. \times P(\mathbf{f} | \varphi) d\alpha d\varphi \right]^{-1}. \quad (7.48)$$

Выражения для $\langle \varphi \rangle$ и D_{φ} получаются более сложными, нежели в (7.45), и выполнить соответствующие операции интегрирования весьма непросто даже для нормального закона распределения погрешностей $P(\xi)$. Возможны, однако, некоторые упрощения задачи. Так, решение можно преобразовать к виду

$$\langle \varphi \rangle = \int \varphi P_{\alpha}(\varphi | \mathbf{f}) d\varphi = \int \langle \varphi \rangle_{\alpha} P(\alpha | \mathbf{f}) d\alpha, \\ \langle \varphi \rangle_{\alpha} = \int \varphi P(\varphi | \mathbf{f}) d\varphi, \quad (7.49)$$

$$P(\alpha | \mathbf{f}) = P(\alpha) \left[\int P(\xi) P(\varphi | \alpha) d\varphi \right] \left[\int P(\alpha) P(\xi) \times \right. \\ \left. \times P(\varphi | \alpha) d\varphi d\alpha \right]^{-1}.$$

Следуя работе [220], допустим, что экспериментальный вектор \mathbf{f} несет достаточно много информации о параметре α . Тогда функция $P(\alpha | \mathbf{f})$ будет иметь резкий максимум при некотором $\alpha = \alpha_0$ и, принимая, что $P(\alpha | \mathbf{f}) = \delta(\alpha - \alpha_0)$, получаем $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle_{\alpha_0}$. (Поведение функции $P(\alpha | \mathbf{f})$ в зависимости от α при решении интегрального уравнения Абеля, например, действительно оказывается δ -образным.) Реальных конструктивных алгоритмов выбора распределения $P(\alpha)$ пока предложено не было. В частности, можно принять $P(\alpha) = \text{const}$ для $\alpha \in [0, A]$, где A — произвольное достаточно большое число. Тогда можно показать [169], что

$$P_{\alpha}(\varphi | \mathbf{f}) = C(\varphi, \Omega\varphi)^{-(n+1)/2} \times \\ \times P(\xi) \gamma((n+2)/2, A(\varphi, \Omega\varphi)/2), \quad (7.50)$$

где γ — неполная гамма-функция. Сложность непосредственного поиска первого момента φ здесь очевидна. С другой стороны, найти положение максимума $P(\alpha | \mathbf{f})$ гораздо проще. Действительно, для $P(\alpha) = \text{const}$ и нормального распределения $P(\xi)$ имеем

$$P(\alpha | \mathbf{f}) \sim P(\mathbf{f} | \alpha) = C_{\alpha} \int \exp[-\alpha(\varphi, \Omega\varphi)/2 - (\xi, W\xi)/2] d\varphi = \\ = \{(\det \Omega)^{1/2} \exp[-(\mathbf{f}, W\mathbf{f})/2]\} \alpha^{n/2} [\det(K^*WK + \alpha\Omega)]^{-1/2} \times \\ \times \exp[(1/2)(K^*W\mathbf{f}, [K^*WK + \alpha\Omega]^{-1}K^*W\mathbf{f})], \quad (7.51)$$

$$\partial P(\mathbf{f} | \alpha) / \partial \alpha = P(\mathbf{f} | \alpha) [n/2\alpha - (1/2) \text{Sp}\{\Omega[K^*WK + \\ + \alpha\Omega]^{-1}\} - (1/2)([K^*WK + \alpha\Omega]^{-1}K^*W\mathbf{f}, \\ \Omega[K^*WK + \alpha\Omega]^{-1}K^*W\mathbf{f})]. \quad (7.52)$$

Окончательно получаем уравнение для поиска α_0

$$\alpha = n [\text{Sp}\{\Omega(K^*WK + \alpha\Omega)^{-1}\} + \langle \langle \varphi \rangle_{\alpha}, \Omega \langle \varphi \rangle_{\alpha} \rangle]^{-1}. \quad (7.53)$$

При решении этого уравнения достаточно быструю сходимость дает метод последовательных приближений. Относительно выбора параметра α в некоторых других вариантах метода статистической регуляризации см. также [14, 47].

Следует указать на то, что вводимая нами до сих пор плотность априорной вероятности (7.43) и (7.47) не полностью отражает физическую реальность во многих задачах, что связано с минимумом внесения дополнительной информации. Так, если в некотором направлении в пространстве решений априорная информация о гладкости «доминирует» над экспериментальной (заложеной в исходном уравнении), то решение в таких направлениях стремится к нулю:

$$\varphi_i \simeq \alpha^{-1} (\Omega^{-1} K^* W f)_i \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0, \quad \|\Omega^{-1} K W\| < \infty. \quad (7.54)$$

В противоположность этому при уменьшении ошибок эксперимента, что соответствует стремлению к нулю элементов ковариационной матрицы W^{-1} случайного шума ξ , резко возрастает неустойчивость решения плохо обусловленной или вырожденной системы из-за потери информации о гладкости решения

$$K^* W K \varphi \simeq K^* W f. \quad (7.55)$$

Данное уравнение представляет собой, однако, не что иное, как запись метода наименьших квадратов, который, как известно [225], ухудшает обусловленность исходной системы.

В физических задачах часто об искомом векторе φ известно, что он существенно неотрицателен: $\varphi \geq 0$. В этом случае ряд авторов [360, 367] вводит пробное решение, к которому стремится искомое в отсутствие достаточно надежной информации в каких-либо направлениях. В таком же плане нетрудно обобщить изложенный ранее метод статистической регуляризации. Вводя пробное решение μ , можно привести уравнения (7.47) и (7.45) к виду [169]

$$P(\varphi) \sim \int \alpha^{n/2} P(\alpha) \exp \{ - (\alpha/2) (\varphi - \mu, \Omega [\varphi - \mu]) \} d\alpha, \quad (7.56)$$

$$\langle \varphi \rangle_{\alpha_0} = (K^* W K + \alpha_0 \Omega)^{-1} (K^* W f + \alpha_0 \Omega \mu), \quad (7.57)$$

$$\alpha = n \{ \text{Sp} \{ \Omega (K^* W K + \alpha \Omega)^{-1} + \langle \langle \varphi \rangle_{\alpha}, \Omega \langle \varphi \rangle_{\alpha} \rangle + (\mu, \Omega \mu) \} \}^{-1}. \quad (7.58)$$

Дисперсия решения осталась прежней, $\sigma_i^2 = \sigma_{i\alpha_0}^2$. Очевидно, что изложенный ранее подход есть частный случай

выбора пробного решения $\mu = 0$, что не всегда может считаться априори лучше произвольного $\mu \neq 0$. Если искомое решение исследователь получает после большого числа решений задачи с варьируемыми экспериментальными данными, то в качестве пробной функции μ можно выбрать среднее значение по всем предыдущим опытам. Например, при восстановлении функции распределения электронов по скоростям это может быть наиболее близкое к искомому максвеллово распределение, которое несложно получить, решая параметрическую задачу, и т. п. Для случая преобладания «веса» априорной информации имеем $\langle \varphi \rangle_i \simeq ([\alpha \Omega]^{-1} \alpha \Omega \mu)_i = \mu_i$, к такому решению, однако, следует относиться осторожно.

Следующим шагом, обобщающим метод, может служить замена скалярной величины α векторной $\alpha = \{\alpha\}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$; $k \leq (n - 1)$ с разбиением интервала изменения функции $\varphi(x)$ на k зон в общем случае произвольной длины: $x \in \bigcup_{j=1}^{k-1} [x_j, x_{j+1}]$. Стабилизатор $\alpha \Omega$ представим теперь как блочную матрицу $\Omega^B = \sum_j \alpha_j \Omega_j^B$, где Ω_j^B

имеет вид $\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_j \\ 0 \end{bmatrix}$ и определяется при помощи отобра-

жения $(\varphi, \Omega_j^B \varphi) = \|\varphi\|_{W_2^p[x_j, x_{j+1}]}^2$. Тогда решение и его дисперсия запишутся так:

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle &= (K^*WK + \Omega^B)^{-1} (K^*Wf, \Omega^B \mu), \\ \sigma_i^2 &= (K^*WK + \Omega^B)_{ii}^{-1}, \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$\alpha_j = d_j [\text{Sp} \{\Omega_j^B (K^*WK + \Omega^B)^{-1}\} + (\langle \varphi \rangle_\alpha, \Omega_j^B \langle \varphi \rangle_\alpha) + (\mu, \Omega_j^B \mu)]^{-1}, \quad d_j = \dim \Omega_j, \quad \sum_{j=1}^k d_j = n.$$

Рассмотренные ранее способы выбора вида априорной информации $P(\varphi)$ позволяют делать некоторые довольно общие заключения относительно суммарных информационных возможностей, выражаемых плотностью апостериорной вероятности $P(\varphi|f)$, которая определяется формулой Байеса (7.36) или (7.48). Проиллюстрируем это на примере обратной задачи, часто возникающей в диагности-

ческих приложениях [165]. При восстановлении локальных оптических характеристик плазмы (коэффициентов испускания $\varepsilon(r)$, поглощения $\kappa(r)$ и т. п.) по интегральным интенсивностям, фиксируемым вдоль набора параллельных лучей зрения, в некоторых случаях не удастся охватить прямыми измерениями все участки плазмы в выбранном сечении. Может также оказаться, что по тем или иным причинам часть измерений обладает очень большой погрешностью, т. е. малодостоверна.

Возьмем для определенности оптически прозрачный осесимметричный слой радиуса R и допустим, что экспериментальные данные по параллельным хордам $f(x)$ получены лишь для части радиуса, т. е. $x \in [0, R_1 < R]$. Задача сводится, таким образом, к обращению уравнения Абеля

$$2 \int_x^R r \varphi(r) (r^2 - x^2)^{-1/2} dr = f(x), \quad 0 \leq x \leq R_1, \quad (7.60)$$

для $0 \leq r \leq R$, $\varphi = \varepsilon$ (рис. 18). Обратимся к формуле Байеса в простейшей форме (7.36). Если бы $R_1 = R$, а измерения $f(x)$ были выполнены достаточно точно, то плотность условной вероятности $P(f, \varphi)$ как функция φ представляла бы собой острый, почти δ -образный импульс (это следует, например, из оценок, сделанных в работе [143]). Требования к заданию $P(\varphi)$ являются весьма

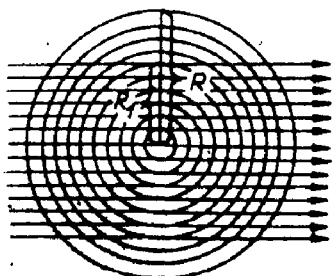


Рис. 18. Схема измерений с ограниченной экспериментальной информацией.

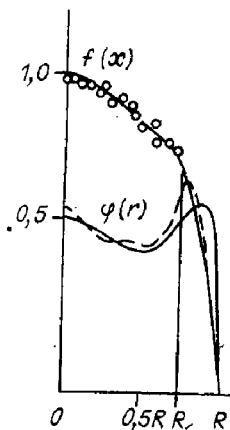


Рис. 19. Восстановление радиального профиля коэффициента эмиссии $\varphi(r)$ с максимумом в периферийных зонах; $n = 20$, $x \leq 0,75$; погрешность эксперимента 3%. Сплошные линии — точные $\varphi(r)$ и $f(x)$, штриховая — результат восстановления; \circ — «экспериментальные» точки.

мягкими. Этому соответствует относительная легкость простейшей процедуры абелевой инверсии, производимой с помощью самых разнообразных приемов эвристического толка, подчас весьма далеких от совершенства, если их рассматривать с современных позиций (подробнее об этом см. в гл. 9).

Начнем теперь последовательно уменьшать отношение R_1/R . Количество информации, содержащейся в $f(x)$, при этом тоже уменьшится, причем очень неравномерно: наименее информативными в $f(x)$ окажутся периферийные зоны; вклад от которых, хотя и продолжает поступать, но соответствует все более коротким отрезкам на оставшихся лучах зрения. Плотность вероятности $P(f, \varphi)$ как функция φ становится не δ -образной, и необходимость дополнить задачу более содержательной априорной информацией $P(\varphi)$ оказывается все более острой. В этих условиях все несовершенные «стихийные» приемы, позволяющие находить $\varphi(r)$, при $R_1 \doteq R$ становятся непригодными. Хорошими возможностями задания $P(\varphi)$, как мы только что видели, располагает метод поиска решения в слоистом ансамбле с выбором α по уравнению (7.53). Именно он был опробован в работе [165], причем класс решений дополнительно сужался требованием неотрицательности φ (см. гл. 8). С математической точки зрения (после дискретизации задачи) в данном случае имеет место поиск нормального решения недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_m K_{nm} \varphi_m = f_n, \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (7.61)$$

при $N < M$ [217].

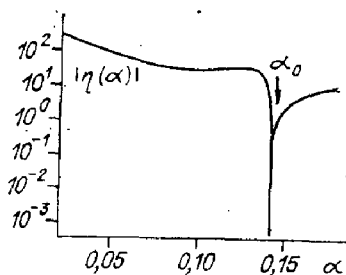
Типичный результат восстановления приведен на рис. 49. В математическом эксперименте считалось, что измерения f_n с погрешностью 3% проведены для хорд, соответствующих интервалу $0 \leq x \leq 0,75R$. Как видим, вполне приемлемое восстановление $\varphi(r)$ при $0 \leq r \leq R$ оказывается возможным даже при максимуме искомой функции, попадающем в нефиксируемую зону. Согласно расчетам, когда ход $\varphi(r)$ в этой зоне остается монотонным, удовлетворительное решение задачи возможно и для более узких интервалов изменения величины x , иногда даже до $x \in [0, R/3]$. Дальнейшее развитие алгоритма для вос-

становления $\varphi(r)$ при ограниченной измерительной информации, вообще говоря, должно основываться на идеях дескриптивной регуляризации, обсуждаемой в гл. 8. Отметим, что близкие по постановке задачи рассматривались также в работах [265, 82].

При невнимательном анализе рассматриваемой задачи может создаться впечатление о ее неединственности, т. е. о нарушении второго условия корректности Адамара. Так, если один и тот же участок функции $f(x)$ на интервале $0 \leq x \leq R_1$ достроить различными способами на интервале $R_1 < x \leq R$, «недоступном» для наблюдения, то формальное обращение Абеля приведет к резко отличающимся функциям $\varphi(r)$ на всем интервале $0 \leq r \leq R$. Нетрудно видеть, однако, что такой способ подхода к задаче ошибочен; в этом можно убедиться на элементарном примере, даже не требующем вычислений. Пусть на интервале $0 \leq x \leq R_1$ $f(x) = 0$, а при $R_1 < x \leq R$ имеется некоторое распределение $f(x) > 0$. Такой ситуации может отвечать либо нарушение условия осевой симметрии, либо отрицательные значения $\varphi(r)$, не имеющие физического смысла; иными словами, решения задачи не существует (задача некорректна по первому условию Адамара). Поскольку какой-либо ограничивающий принцип выбора $f(x)$ при достройке на интервале $R_1 < x \leq R$ отсутствует, правильный подход к моделированию задачи должен быть иным, именно: задаем $\varphi(r)$ на всем интервале $0 \leq r \leq R$, вычисляем всю правую часть $f(x)$, имитируем эксперимент набросом ошибки $\xi(x)$, выделяем нужный интервал $0 \leq x \leq R_1$ и по этим данным восстанавливаем функцию $\varphi(r)$, которую сравниваем с исходной. Как раз так и производилась серия математических экспериментов, упомянутых ранее.

Коснемся еще вопроса определения α из уравнения (7.53). Решение этого уравнения α_0 есть некоторая статистическая оценка параметра регуляризации, тем более точная, чем более резкий максимум имеет плотность условной вероятности $P(\alpha|f)$ в области α_0 . В применении к только что описанной задаче эта особенность проверялась на некоторых модельных функциях; на рис. 20 [166] дана в полулогарифмическом масштабе зависимость $|\eta(\alpha)| \equiv |\partial \{\ln P(\alpha|f)\} / \partial \alpha|$ для функции $f(x) = (8/15)(1 - x^2)^{1/2} \times (34x^4 + 7x^2 + 4) + 12x^4 \cdot \ln \{ [1 - (1 - x^2)^{1/2}] / [1 + (1 - x^2)^{1/2}] \}$, искаженной 3%-ным шумом. Видно, что

Рис. 20. Поведение функции $\eta(\alpha)$ вблизи α_0 ; модельный эксперимент; погрешность 3%.



функция $\eta(\alpha)$ очень резко переходит из области ее положительных значений в область отрицательных.

В заключение отметим еще несколько работ, в которых байесовский подход к регуляризации получил дальнейшее уточнение и развитие. Е. Л. Жуковский [73] для устойчивого решения систем линейных уравнений использовал методы фильтрации марковских процессов и процедур последовательного включения накопленной информации для улучшения оценки. Им изучены предельные свойства оценок, когда число измерений $N \rightarrow \infty$. Продолжая это исследование в рамках байесовского подхода, Е. Л. Жуковский и В. А. Морозов [74] пришли несколько иным путем к ряду приводившихся формул. Итерационный вариант того же подхода рассмотрел Шоу [356], подразделивший процесс решения задачи на несколько этапов, включающих получение начальной оценки решения, уточнение последовательных оценок на основе знания предыдущих, выбор теста, позволяющего судить о скорости сходимости итераций.

Работа Франклина [287] в известной мере обобщает результаты уже упоминавшейся статьи Стрэнда и Вестуотера [360], распространяя поиск байесовских решений на широкий класс линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве, правая часть и решения которых суть случайные процессы со значениями в этом пространстве. В [287] в качестве примеров рассмотрены обратная задача теплопроводности, интегральные уравнения 1-го рода, вырожденные системы линейных алгебраических уравнений, задача аналитического продолжения. Наконец, в цитированном ранее обзоре Ханта [230] даны интересные примеры, подтверждающие возможность получать в процессе статистической регуляризации устойчивые решения не только линейных, но и многих нелинейных задач.

ДЕСКРИПТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Термин «дескриптивная регуляризация», по-видимому, впервые предложен авторами работы [148] и еще широко не распространен. Нам он представляется, однако, вполне приемлемым для характеристики тех алгоритмов решения некорректных обратных задач, в которых современные принципы регуляризации органически сочетаются с такой нетривиальной априорной информацией о решении, как знакоположительность, монотонность, выпуклость, симметрия, количество ожидаемых экстремумов и т. п. Кроме того, обычно считается, что искомая функция в целом является «хорошей», т. е. она однозначна, не имеет точек возврата и остается достаточно гладкой, иными словами, может быть нарисована одним «росчерком пера». Дискретизация таких задач, как правило, приводит к проблеме нелинейного программирования со специфическими ограничениями в виде неравенств [233, 238]. Весьма перспективным здесь представляется также использование методов Монте-Карло.

Следующим этапом на пути априорного доопределения искомого решения является представление его в параметрической форме и сведение задачи к поиску того или иного набора параметров. Общие идеи регуляризации сохраняют свое значение, вообще говоря, и в этом случае. Например, анализ информационной обеспеченности нелинейных многопараметрических задач, расчет «коэффициентов усиления» погрешностей параметров, правильное соотнесение этих параметров с классами искомых и заданных величин и другие подобные вопросы легко решаются в рамках той же байесовской стратегии, которая используется в методах статистической регуляризации. Отметим, что некоторые аспекты связи информационной структуры задачи с проблемами регуляризации затрагиваются в обзоре В. П. Козлова [99].

§ 1. Включение в регуляризующие алгоритмы ограничительных неравенств

Физический смысл многих функциональных плазменных характеристик, являющихся предметом восстановления путем решения обратной задачи, таков, что они существенно положительные: различные функции распределения, их моменты (плотности и температуры), пространственные распределения магнитного поля, коэффициентов испускания и поглощения и т. п. Поэтому последовательный учет неотрицательности φ в операторном уравнении $K\varphi = f$ играет особо важную роль. Мы уже неоднократно встречались с алгоритмами, авторы которых стремились произвести такой учет: схемы Жансона, Табабы—Хуанга (§ 3), алгоритм Толпиной (см. гл. 5), алгоритмы Фридена и Бурга, основанные на условии максимума энтропии (см. гл. 7).

Рассмотрим подробнее, как можно осуществить учет неотрицательности решения в рамках метода статистической регуляризации, основанного на формуле Байеса (7.48) [222]. Если ввести функцию $\zeta(\varphi)$, обращающуюся в нуль в тех случаях, когда $\varphi_m < 0$ хотя бы при одном $m = 1, 2, \dots, M$, то далее следует домножить плотность априорной вероятности $P_\alpha(\varphi)$ (7.47) на $\zeta(\varphi)$. Однако интеграл в формуле (7.49) для $P(\alpha|f)$ уже нельзя взять аналитически, и поэтому нахождение наиболее вероятного значения параметра регуляризации α_0 становится затруднительным.

Авторы [222] пошли на упрощение, предложив находить α_0 без учета множителя $\zeta(\varphi)$, а вводить его непосредственно в выражение апостериорной вероятности $P(\varphi|f)$. Но трудность сохраняется: новые интегралы, возникающие при вычислении математического ожидания $\langle \varphi \rangle$ и компонентов ковариационной матрицы D_φ , тоже не берутся аналитически. Новое упрощение, предложенное в [222], состояло в том, чтобы принять за решение не $\langle \varphi \rangle$, а такое значение вектора φ^{\max} , которое соответствовало бы максимуму апостериорной плотности вероятности $P(\varphi|f)$, учитывающей $\zeta(\varphi)$. Величина φ^{\max} находится при этом как точка гипероктанта $\varphi > 0$, в которой функционал

$$Z(\varphi) = (1/2)(\varphi, [K^*WK + \alpha\Omega]\varphi) - (K^*Wf, \varphi) \quad (8.1)$$

достигает минимума (все обозначения — из гл. 7).

Чтобы уменьшить погрешность восстановления вследствие завышенного значения α_0 , найденного без учета неотрицательности решения, в [222] дан прием корректировки α_0 . К сожалению, этот прием носит довольно частный характер и приспособлен к рассмотренной в работе специфической задаче деконволюции свертки двух простых спектральных профилей с треугольной аппаратной функцией. Более эффективным представляется иной путь. Он связан с учетом того обстоятельства, что при решении операторных уравнений $K\phi = f$ с непрерывным или дискретным спектром собственных чисел λ и точкой сгущения $\lambda = 0$ редукция к задаче линейной алгебры порождает как минимум два малых параметра: α и шаг сетки, которые для достижения большей точности решения необходимо рационально уменьшать. Общие принципы повышения точности численного решения линейных задач при использовании нескольких параметров аппроксимации сформулированы еще несколько десятилетий назад Ричардсоном [346, 347]; известны также сугубо эвристические принципы Рунге и Ромберга. Последовательное обоснование этих принципов и распространение их на широкий класс задач, в том числе и нелинейных, было выполнено в последние годы Г. И. Марчуком и В. В. Шайдуровым [134].

Применительно к рассматриваемой задаче целесообразно поступать следующим образом. После получения ϕ^{\max} по упрощенному алгоритму [222] нужно произвести сгущение сетки в области пиков решения (если таковых несколько, а среди них имеются и те, которые подозреваются ложными) с одновременным дроблением параметра регуляризации: $\alpha/2$, $\alpha/3$ и т. д. Если s — число таких решений, то по Ричардсону их линейная комбинация с некоторыми весами позволяет получить нормальное решение, точность которого определяется величиной $O(\alpha^s)$. В качестве весов можно взять поправочные множители, характеризующие неравномерность распределения ϕ в рассматриваемом интервале. Тем самым уточнение параметра регуляризации происходит согласованно с корректировкой шага сетки.

Некоторые результаты расчетов иллюстрируются рис. 5 и 21 [186]. При решении задачи, подробно описанной в гл. 5, применен метод статистической регуляризации в варианте [222], но без корректировки параметра α_0

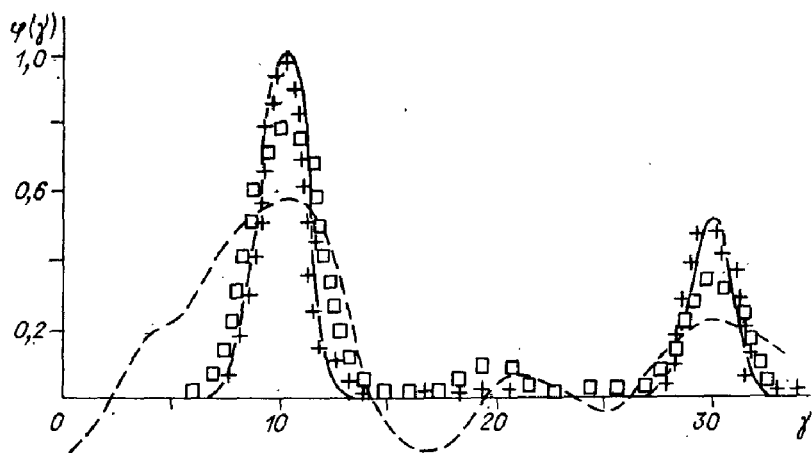


Рис. 21. Восстановление дублета гауссиан; $a_1 = 2a_2$, $b_1 = b_2$, $\gamma_{01} = 10$, $\gamma_{02} = 30$.

Сплошная линия — точное решение; штриховая — метод статистической регуляризации без учета неотрицательности; \square — схема [186]; $+$ — схема [186] с использованием линейной комбинации решений по Ричардсону.

(см. рис. 5, 2). Использование схемы уточнения α по Ричардсону при наличии 3—4 последовательных дроблений α_0 позволило добиться практически идеального восстановления заданной двугорбой функции. На рис. 21 приведены результаты расчетов для дублета гауссиан

$$\varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^2 a_i \exp[-(\gamma - \gamma_{0i})^2 b_i^{-2}],$$

параметры которых намеренно выбирались такими же, как и в работе [222], однако ядро уже было лоренцевым, неразностным и соответствовало режиму гетеродинамирования в методе оптического смешения сигналов. Как видно из рисунка, обычный метод статистической регуляризации, не учитывающий неотрицательности функции $\varphi(\gamma)$, дает в целом неудовлетворительный результат (штриховая линия); схема [222] обеспечивает значительно лучшее восстановление, но все же не гарантирует от появления артефактов (квадратики); наконец, процедура уточнения α по Ричардсону приводит к новому заметному улучшению восстановленного решения и практически позволяет избавиться от артефактов (крестики). Правда, как и в первом примере, это достигается ценой усложнения алгоритма и повышенных затрат машинного времени.

Подытоживая сказанное, мы можем заключить, что сочетание поиска байесовского решения в слоистом ансамбле с учетом неотрицательности этого решения в принципе возможно. Оно дает (особенно с привлечением схемы Ричардсона) хорошие результаты восстановления в достаточно сложных ситуациях, но в целом остается громоздким и неэффективным при наличии маломощных ЭВМ. Подчеркнем, что одного лишь ограничения неотрицательными функциями при $\alpha \rightarrow 0$ для регуляризации совершенно недостаточно: в этом случае нельзя избежать паразитных выбросов функции φ . Более подробно данный вопрос разобран в работе [186].

Обсудим теперь кратко возможности введения в регуляризующий алгоритм более детальной априорной информации о решении, такой как монотонность и выпуклость функции φ на определенных участках [148]. Класс гладких функций, имеющих $P - 1$ участок монотонности, можно выделить условием

$$T_1 = \{\varphi(x): (-1)^{l+i} \varphi'(x) \leq 0, x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ i = 1, 2, \dots, P - 1\}, \quad (8.2)$$

где x_i соответствуют экстремумам $\varphi(x)$, $x_1 < x_2 < \dots < x_p$, а параметр l , равный 1 или 2, определяет характер монотонности на первом участке. Еще большая детализация рассматриваемого класса функций достигается при выделении участков знакопостоянства их кривизны:

$$T_2 = \{\varphi(x): (-1)^{v+j} \varphi''(x) \leq 0, \\ \bar{x}_j \leq x \leq \bar{x}_{j+1}, j = 1, 2, \dots, Q - 1\}, \quad (8.3)$$

где \bar{x}_j , $j = 2, 3, \dots, Q - 1$, — точки перегиба функции $\varphi(x)$, $x_1 < x_2 < \dots < x_Q$, параметр v , равный 1 или 2, определяет знак кривизны на первом участке. При этом узлы x_i и \bar{x}_j должны удовлетворять определенным, легко формулируемым условиям согласования; как правило, такие условия соответствуют некоторым интуитивным соображениям о «простоте» поведения функций $\varphi(x)$ из рассматриваемого класса.

Как показано А. В. Гончарским и А. Г. Яголой [61], условия типа (8.2) стабилизируют приближенные решения в равномерной метрике. В свою очередь, М. К. Самарин [148] доказал, что привлечение условий выпуклости

обеспечивает стабилизацию первого порядка гладкости, т. е. имеет место равномерная сходимость приближений вместе с производными. Заметим, что анализ сходимости приближений к точному решению можно провести не только для обычных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, когда

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (8.4)$$

$$f(x) \in L_2[c, d], \quad K(x, y) \in L_2(\Gamma), \quad \Gamma = [c, d] \times [a, b],$$

но и для уравнений в форме Стилтеса [62]:

$$\int_a^b K(x, y) d\varphi(y) = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (8.5)$$

Эта форма играет исключительно важную роль в задачах спектроскопии оптически плотной плазмы [174], а также в теории многочастотного лазерного зондирования атмосферы [150].

Благодаря компактности множества монотонных решений, соответствующих (8.4) и (8.5), существуют широкие возможности построения алгоритмов, обеспечивающих устойчивые приближения $\varphi(y)$. Так, весьма удобным и эффективным оказался метод условного градиента (вариант Демьянова) [58]; программа на языке ФОРТРАН, реализующая этот метод, опубликована в [242]. Для решения задач (8.4) и (8.5) на множестве монотонных ограниченных функций можно воспользоваться другими методами минимизации, широко распространенными в вычислительной практике: методами проекции градиента, наискорейшего спуска [58]. Авторы работы [148], решая задачу квадратичного программирования с использованием условий монотонности и выпуклости функций, прибегли к квазиньютоновскому методу проекции сопряженных градиентов.

В работах [169, 207] развит подход, основанный на схеме нелинейного программирования достаточно общего вида, обладающей низкой чувствительностью к алгоритму выбора параметра α и структуре стабилизатора Ω . Это позволяет начать расчет с конкретизации вида стабилизирующего функционала гладкости и определения α одним из известных методов, например по итерационной форму-

ле (7.46). Тогда задача сводится к нахождению условного экстремума:

$$\min Z(\varphi), \quad H\varphi \geq \mathbf{h}, \quad (8.6)$$

где $Z(\varphi)$ определяется формулой (8.1), а число ограничительных неравенств может быть, вообще говоря, произвольным.

Переходя к задаче на безусловный экстремум, запишем функцию Лагранжа в виде

$$L(\varphi) = Z(\varphi) + (\lambda, [\mathbf{h} - H\varphi]), \quad (8.7)$$

причем по теореме Куна—Таккера [238] вектор множителей Лагранжа $\lambda \geq 0$. Поиск седловой точки $\{\varphi_0, \lambda_0\}$ как решения экстремальной задачи (8.6) не представляет труда. Действительно, φ_0 должен быть стационарным вектором функции Лагранжа (8.7) при $\lambda = \lambda_0$:

$$\varphi_0 = G^{-1}(\mathbf{g} + H^*\lambda_0), \quad (8.8)$$

где для сокращения обозначено:

$$G = K^*WK + \alpha\Omega, \quad \mathbf{g} = K^*Wf. \quad (8.9)$$

В свою очередь, подставляя общее выражение $\varphi = G^{-1}(\mathbf{g} + H^*\lambda)$ в (8.7) и вводя дополнительные обозначения

$$V = HG^{-1}H^*, \quad \mathbf{v} = \mathbf{h} - HG^{-1}\mathbf{g}, \quad (8.10)$$

получаем следующую задачу минимизации:

$$\min_{\lambda \geq 0} \{(1/2)(\lambda, V\lambda) - (\lambda, \mathbf{v})\}, \quad (8.11)$$

решением которой будет λ_0 . Наконец, (8.8) дает искомый результат.

Применение описанного алгоритма с использованием только условия знакоположительности $\varphi(H \equiv E, \mathbf{h} = 0)$ дает, как показывают расчеты [186], практически тот же результат, что и расчет по алгоритму [222]. Однако в данном случае существует естественный путь улучшения решения: производится рациональная деформация сетки, выявляются участки монотонности и выпуклости φ_0 , для них записываются новые неравенства $H\varphi = \mathbf{h}$, и решение повторяется. Таким образом, к априорной информации как бы последовательно добавляется апостериорная, причем нет необходимости производить корректировку α

и Ω , поскольку «удельный вес» факторов, связанных с гладкостью решения, далее лишь снижается. Однако поэтапное включение в алгоритм новых неравенств вида $H\varphi \geq h$ должно выполняться с большой осторожностью, так как, например, использование условий монотонности или выпуклости для артефакта может лишь ухудшить результат и усугубить проявление ложных структур. Все эти вопросы нуждаются еще в тщательном изучении.

Для рассмотренных модельных задач, относящихся к решению уравнения (5.11) (см. рис. 5 и 21), применение описанного алгоритма оказалось эффективным [186]: ложные выбросы и всплески в далеких крыльях $\varphi(\gamma)$ удалось полностью устранить, а восстановление исходных гауссиан сделать таким, что в масштабе рисунков они были неотличимы от точных кривых (в исходные данные вводилась случайная погрешность $s_n = 0,03f_n$). Различие сказывается лишь при наличии ошибок измерений $\sim 10\%$. В работе [207] тем же способом выполнена задача редукции к идеальному спектральному прибору, когда аппаратная функция была шире восстанавливаемой в 3 раза.

Упомянем еще комплексное исследование [107], одним из этапов которого была сепарация нескольких перекрывающихся компонентов сверхтонкой структуры линий резонансной и сенсibilизированной атомной флуоресценции. В данном случае освобожденный от искажающего влияния прибора и реабсорбции контур линии $I(\omega)$ все еще оставался результатом наложения нескольких (J) компонентов СТС:

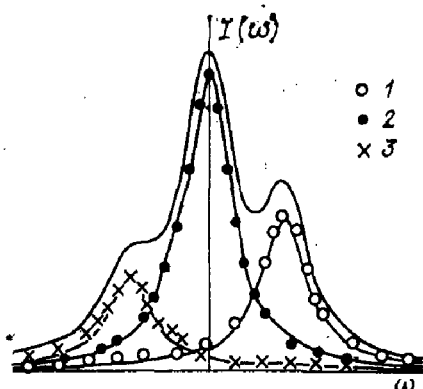
$$I(\omega) = \sum_{j=1}^J I_j(\omega), \quad (8.12)$$

причем истинная форма отдельных компонентов подлежала определению.

В подобных ситуациях помимо обычных требований определенной степени гладкости $I_j(\omega)$ могут в зависимости от задачи фигурировать такие априорные данные, как число компонентов, положение (хотя бы примерное) их центров, наличие зеркальной симметрии, полная интенсивность каждого из них, равенство (или неравенство) полуширин и т. п. Кроме того, конечно, существенны знакположительность $I_j(\omega)$ и допущения о монотонности для каждой из половин $I_j(\omega)$, если положение максимумов можно оценить.

Рис. 22. Разложение сложного контура на составляющие. Модельный расчет с вводом 1%-ной погрешности в $I(\omega)$.

Сплошные линии — точные профили; 1—3 — результаты вычислений.



На рис. 22 приведен результат решения достаточно простой модельной задачи о сепарации сложного контура на три составляющих с использованием данных о положении их центров, допущений о симметрии профилей и наличии участков монотонности, а также неотрицательности $I_j(\omega)$.

Как показывают численные расчеты, при наличии такого комплекса априорных данных могут быть отсепарированы и значительно более сложные суперпозиции сигналов.

Таким образом, анализ вычислительных затрат — памяти и времени ЭВМ, — проведенный применительно к методам дескриптивной регуляризации в работе [148], показывает, что они сравнимы с аналогичными затратами, необходимыми для минимизации конечномерных квадратических задач без ограничений методом сопряженных градиентов. Дескриптивная регуляризация особенно эффективна, когда:

а) оператор K уравнения $K\phi = f$ является единичным, т. е. решается задача приближения на множестве кусочно-монотонных функций;

б) на ЭВМ имеется дисплей, позволяющий оперативно анализировать и принимать решения, например, касающиеся тех или иных изменений, вносимых в модель, в ходе самого вычислительного процесса;

в) решаются нелинейные интегральные уравнения в отсутствие явного задания оператора.

§ 2. Применение метода Монте-Карло

При построении алгоритмов решения некорректных обратных задач метод Монте-Карло до сих пор применялся мало. Здесь можно указать, пожалуй, лишь на два спе-

циальных направления исследований. Во-первых, попытки реставрации двумерных изображений (см. обзор [227] и указанную в нем библиографию), в которых, по признанию самого автора разработок, создание алгоритма осталось незавершенным. Во-вторых, обратные задачи теории переноса излучения, решаемые методом малых возмущений, разработанным Г. И. Марчуком [133]. В данном случае целесообразность использования метода Монте-Карло достаточно очевидна [141, 144], причем соответствующий подход при должном обобщении может оказаться полезным и в задачах диагностики плазмы. В самом деле, если вектор $\varphi = \{\varphi_m\}$ является искомой характеристикой, а в эксперименте измеряются величины $K_n(\varphi)$, где $n = 1, 2, \dots, N$, то, используя принцип возмущений, не представляет труда линеаризовать систему уравнений

$$K_n(\varphi) = f_n \quad (8.13)$$

в точке $\varphi = \varphi^0$. Искомыми становятся компоненты вектора $\Delta\varphi\{\Delta\varphi_m\}$, $m = 1, 2, \dots, M$, и после надлежащего «масштабирования» строк и столбцов исходной матрицы система линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^M [\partial K_n / \partial \varphi_m] \Delta\varphi_m = f_n - K_n(\varphi^0) \quad (8.14)$$

может в простейшем случае решаться стандартным методом наименьших квадратов. Не представляет труда регуляризовать решение с помощью имеющейся в распоряжении априорной информации. В сложных нелинейных постановках, например с учетом многократного рассеяния излучения, метод Монте-Карло позволяет одновременно вычислять как набор величин K_n , так и совокупность элементов матрицы Якоби ($\partial K_n / \partial \varphi_m$). Получив такие числовые данные для стандартных моделей, в дальнейшем можно решать обратные задачи в первом приближении, уже не привлекая метод Монте-Карло.

Г. А. Михайловым [144] предложены некоторые другие пути решения обратных нелинейных задач, использующие метод Монте-Карло в процедуре последовательного выделения из экспериментальной информации $\{f_n\}$ вкладов однократного, двукратного и т. д. рассеяния. Таким способом уже удавалось эффективно восстанавливать

индикатрису рассеяния в атмосфере по наблюдениям яркости в альмукантарате Солнца. В работе [144], однако, подчеркивается, что для задач такого рода еще слабо изучены принципиальные вопросы сходимости итераций, а также не доказаны теоремы существования и единственности. Нужно добавить, что соответствующие задачи еще не были регуляризованы, хотя возможность для этого имеется.

Опишем теперь более универсальный алгоритм, применимый как к одномерным, так и многомерным задачам, в том числе к нелинейным, который разрабатывался и проверялся А. Е. Булышевым. Сущность алгоритма во избежание использования громоздкой системы индексов поясним на традиционной алгебраизованной версии основного линейного операторного уравнения

$$\sum_{i=1}^N K_{mi} \varphi_i = f_m; \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (8.15)$$

Реализуем следующую совокупность операций.

1. На сетке, соответствующей заданию искомой функции, осуществим случайный выброс узловой точки i , пусть для n -го шага $i = j$.
2. Найдем для этого выброса вклад в правую часть (8.15)

$$\varepsilon_m^n = \varepsilon_m^{n-1} + K_{mj} h_1, \quad (8.16)$$

где h_1 — некоторый интервал, оценку величины которого рассмотрим далее.

3. Сравним ε_m^n и f_m для набора узлов m ; если $\varepsilon_m^n \leq f_m$, то переходим к следующему пункту, в противном случае выброс $i = j$ считаем неудачным и возвращаемся к п. 1.

4. Для принятого выброса определяем

$$\varphi_i^n = \varphi_i^{n-1} + \delta_{ij} h_2, \quad (8.17)$$

где интервал h_2 , вообще говоря, не равен h_1 , но коррелирует с последним, например, через условие нормировки сигнала.

Далее следует новый переход к п. 1.

В математическом эксперименте, выполняемом по схеме «замкнутого цикла», правую часть (8.15) часто представляют в виде

$$f_m = f_m^0 (1 + \kappa \eta), \quad (8.18)$$

где κ — уровень погрешности, а η — псевдослучайное число, распределенное по заданному закону. Тогда из обычного критерия невязки следует оценка интервала h_1 :

$$\|K_{mi}\|h_1 = \kappa\|f_m\|, \quad (8.19)$$

т. е. h_1 выступает в роли своеобразного параметра регуляризации задачи. Разумеется, все сказанное остается в силе и при обработке реального эксперимента с заданной погрешностью измерений.

Окончание вычислительного процесса определяется полным числом «удачных» выбросов, в результате которых искомый вектор получает приращение согласно (8.17). В оптических экспериментах это число обычно можно определить заранее, пользуясь оценкой h_1 (8.19) и критерием сохранения интегральной интенсивности [227]. На практике, однако, процесс можно ускорить, если условиться, что его окончание соответствует достаточно большому наперед заданному числу последовательных не принятых по п. 3 выбросов.

Эффективность алгоритма проверялась на задачах восстановления двумерного изображения, формулируемых с помощью интегрального уравнения 1-го рода:

$$\iint_S K(x, y; x', y') \varphi(x', y') dx' dy' = f(x, y), \quad (8.20)$$

где φ и f описывают распределения яркости в искомом и наблюдаемом изображениях; K — искажающая функция, а интегрирование ведется по всей области истинного изображения S . Один из модельных примеров приведен ниже.

Ядро уравнения (8.20) было взято лоренцевым:

$$K(x, y; x', y') = \gamma/\pi[(x - x')^2 + (y - y')^2 + \gamma^2]. \quad (8.21)$$

Восстанавливалась простая фигура (квадрат), причем вводилось шесть дискретных уровней яркости, обозначаемых в порядке убывания цифрами: 5, 4, 3, 2, 1; нулевой уровень для повышения зрительного контраста не обозначался никак. Нормировки по сумме цифр на заданной площади не производилось, так как в данном примере она была бы фактически лишней (при необходимости ее

4 4 4 4 4 4
 4 4
 4 4
 4 4
 4 4
 4 4 4 4 4 4
 а

		1 1 1
1 1 1 1 1 1		1 1 2 2 2 2 1 1
1 5 5 5 5 5 1		1 3 3 3 3 5 3 1
1 5 2 2 2 2 5 1		1 2 3 3 3 3 3 5 2 1
1 5 2 1 1 2 5 1		1 2 3 3 2 2 3 3 2 1
1 5 2 1 1 2 5 1		1 2 3 3 2 2 3 3 2 1
1 5 2 2 2 2 5 1		1 2 5 3 3 3 3 5 2 1
1 5 5 5 5 5 1		1 3 5 3 3 5 3 2
1 1 1 1 1 1		1 2 2 2 2 2 2 1
б		1 1 1
		в
5 5 5 3 5 3		5 5 5 5 5
3 5 3 5		4 3 5
5 3		5 5
5 3		5 5
3 5 5 3		5 3 3
5 4 5 5 5 3		5 5 5 3 5 5
г		д

Рис. 23. Восстановление простой фигуры методом Монте-Карло.

Изображения: а — исходное, б, в — искаженные двумерной лоренцевой аппаратной функцией (8.21) соответственно при $\kappa = 0$ и $\kappa = 0,1$; г, д — восстановленные при $\kappa = 0$ и $\kappa = 0,1$.

введение не представляет каких-либо затруднений). Уровень погрешности κ варьировался.

Результаты восстановления при значениях $\kappa = 0$ и $\kappa = 0,1$ показаны на рис. 23. Сравнительно неплохим было восстановление при $\kappa = 0,2$; неприемлемым оно становилось при $\kappa \simeq 0,5 \div 0,6$.

Относительно возможностей описанного алгоритма можно сделать несколько общих замечаний.

I. В процессе последовательного формирования компонентов вектора решения $\varphi_i^{(n)}$, согласно (8.17), элементарно учитываются различные априорные ограничения дескриптивного характера, рассмотренные ранее. Такое требование, как неотрицательность решения, автоматически включается в алгоритм.

II. Как отмечалось Фриденом [227], подход к решению обратных некорректных задач на основе метода Монте-Карло в известном смысле может считаться предельно нелинейным. Он хорошо приспособливается к разного рода флуктуациям, резким сменам контраста, к задачам восстановления функций с разрывами производных φ' и т. п.

III. Метод представляется особенно перспективным применительно к задачам двух- и трехмерной плазменной томографии, к проблемам повышения контраста в интерферометрии и голографии, реставрации смазанных изображений. Реализация метода может быть существенно облегчена при наличии дисплея.

§ 3. Информационный анализ обратных задач со многими параметрами

Как уже указывалось, возможность параметризации задачи возникает лишь при наличии достаточно детальной априорной информации о решении, когда более или менее известен его функциональный вид. Конечно, формально можно считать неизвестными параметрами набор ординат искомой функции на заданной сетке, и тогда параметрическая задача будет просто тождественной алгебраизованной версии основного операторного уравнения $K\varphi = f$. Однако мы будем иметь в виду главным образом нетривиальную параметризацию сложной нелинейной обратной задачи, когда число параметров не очень велико, но возможность их однозначного определения с заданной допустимой погрешностью заранее не очевидна.

В этой связи следует особо подчеркнуть, что одно лишь усовершенствование численных методов не способно гарантировать правильную интерпретацию диагностического эксперимента, если в исходных данных отсутствует (или мала) необходимая информация. Объективная оцен-

ка этих данных, выявление структуры содержащейся в них реальной информации о характеристиках плазмы представляют важнейший предварительный этап интерпретации и могут существенно влиять на выбор конкретного метода решения.

Необходимый математический аппарат, пригодный для информационного анализа M -параметрической, вообще говоря, нелинейной задачи

$$\begin{aligned} K_n(\varphi) &= f_n, \quad \varphi = \{\varphi_m\}, & (8.22) \\ m &= 1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, M; \\ n &= 1, 2, \dots, N; \quad N \geq M, \end{aligned}$$

проще всего развить, опираясь на формулу Байеса (7.36) и рассматривая апостериорную плотность вероятности $P(\varphi|f)$ как обобщение понятия функции правдоподобия выборки, широко используемой в математической статистике [127]. Подчеркнем, что развиваемый далее подход — отнюдь не единственно возможный [99].

Пользуясь общими определениями [127] (для функции правдоподобия!), построим с помощью $P(\varphi|f)$ информационную матрицу Фишера задачи

$$G_{ij} = -\partial^2 \ln P(\varphi|f) / \partial \varphi_i \partial \varphi_j. \quad (8.23)$$

Выражение (8.23) в частном случае соответствует формуле

$$G_{ij} = \sum_{n,p} (\partial K_n / \partial \varphi_i) W_{np} (\partial K_p / \partial \varphi_j), \quad (8.24)$$

содержащей элементы матрицы Якоби и ковариационной матрицы W^{-1} вектора f . Если в (8.23) подставить выражение (7.44), то после несложных выкладок найдем, что

$$G = K^* W K + \alpha \Omega, \quad (8.25)$$

т. е. матрица Фишера при $\alpha \neq 0$ получается «регуляризованной». Сравнивая (8.25) с (7.45), убеждаемся, что в случае линейного оператора задачи матрица, обратная G , совпадает с ковариационной матрицей решения D_φ :

$$G^{-1} = D_\varphi. \quad (8.26)$$

В нашем рассмотрении D_φ — матрица вторых моментов оценок неизвестных параметров задачи; однако если задача нелинейная, то соотношение (8.26) выполняется лишь приближенно.

Введем далее, следуя [96], риманову информационную метрику в пространстве состояний объекта исследования. Расстояние ρ в этой метрике определяется с помощью дифференциальной квадратичной формы

$$d\rho^2 = \sum_{i,j=1}^M G_{ij} d\varphi_i d\varphi_j, \quad (8.27)$$

причем параметры φ_i, φ_j считаются координатами в некотором M -мерном пространстве R^M . Если считать R^M евклидовым пространством, то параметры φ_m образуют в нем, вообще говоря, косоугольную систему координат.

Свойства расстояния ρ , определяемого согласно (8.27), подробно обсуждаются в работе [98]. Мы укажем здесь лишь некоторые из них.

1. Конечное расстояние ρ в выбранной метрике определяется как наименьшая длина параметрической кривой $s(x)$ между точками $s_1 = s(x_1)$ и $s_2 = s(x_2)$ в пространстве состояний S ; $s(x) \in S$ при всех $x \in [x_1, x_2]$:

$$\rho = \inf \left[\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i,j=1}^M G_{ij} (d\varphi_i/dx) (d\varphi_j/dx) dx \right]^{1/2}, \quad (8.28)$$

где *infimum* берется по всем непрерывным дифференцируемым кривым, соединяющим точки s_1 и s_2 в S .

2. Величина ρ не зависит от выбора системы параметров, что следует из тензорного преобразования элементов G_{ij} при преобразовании координат. Это позволяет при наличии нескольких вариантов параметризации задачи выбрать наиболее удобный.

3. Величину ρ нельзя увеличить никакими преобразованиями результата эксперимента; если преобразование «сохраняет информацию» о векторе φ , то оно не уменьшается. Важность этого свойства определяется тем, что для проведения информационного анализа задачи не требуется совершать таких, например, операций, как предварительное преобразование фурье-интерферограммы в спектр, сигнала ЯМР в температурную зависимость виртуальных коэффициентов (при восстановлении межмолекулярного потенциала [188]) и т. п.

4. Квадратичная форма (8.27) не убывает, если к имеющемуся наблюдению присоединить результат некоторого другого эксперимента над тем же объектом;

в условиях статистической независимости обоих экспериментов квадратичные формы складываются. В частном случае повторения эксперимента p раз (8.27) возрастает в p раз, а расстояние ρ — в $p^{1/2}$ раз.

5. Порог различимости двух векторов $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ при изменении какого-то одного параметра φ_m можно характеризовать расстоянием $\rho \simeq 1$. Для гауссовых помех в пределе $M \rightarrow \infty$ можно ввести вероятность правильной идентификации решения P_{id} , где $1/2 \leq P_{id} \leq 1$, причем P_{id} независимо от вида оператора и различаемых функций определяется лишь расстоянием ρ по формуле

$$P_{id} = 0,5 + 0,5\Phi(\rho/2), \quad (8.29)$$

где Φ — интеграл вероятности. Заметим, что при $\rho = 1$ $P_{id} = 0,637$, т. е. вероятность правильной идентификации лишь на 13,7% превышает вероятность угадывания (0,5).

Из указанных свойств расстояния ρ можно получить ряд важных следствий. В частности, можно утверждать, что для всякого «истинного» решения обратной задачи $\varphi^{(0)}$ существует бесконечно много функций φ , заполняющих некоторую «сферу неопределенности»:

$$\|\varphi - \varphi^{(0)}\| \leq 1, \quad (8.30)$$

т. е. неотличимых от $\varphi^{(0)}$ и друг от друга. В рамках методов дескриптивной регуляризации мы выделяем в пространстве R^M некоторую область Λ и считаем, что вне ее решения уже не могут нас интересовать. Однако встает вопрос о геометрии и размерах области Λ в метрике (8.27). При этом, если сфера (8.30) с центром $\varphi^{(0)} \in \Lambda$ будет содержать точки, не принадлежащие Λ , то для соответствующих направлений выхода сферы за пределы Λ координаты (т. е. параметры) уже неуточняемы. Стало быть, по отношению к ним эксперимент в совокупности с априорными данными остается информационно необеспеченным, и либо нужно изменять схему эксперимента, либо отказаться от введения такого рода параметров. В связи с этим говорят еще о направлениях вырождения Λ и о способах последовательного «исчерпывания» невырожденных направлений [95]. Не останавливаясь на деталях расчетов [95], кратко изложим лишь главную идею процедуры исчерпывания, следуя более общему рассмотрению, предложенному в [99].

Пусть система функций $\{\psi_q\}$ составлена из решений проблемы собственных значений:

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}G^0\psi_q &= \lambda_q\psi_q, \quad q = 1, 2, \dots, \\ \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > 0, \quad \lambda_q \rightarrow 0 \text{ при } q \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Здесь $G^0 = G(\alpha = 0) = K^*WK$ — нерегуляризованная матрица Фишера, Ω — стабилизатор задачи. Собственные числа λ_q суть стационарные значения отношения квадратичных форм $(G^0\Omega^{-1}G^0*\psi, \psi)/((\psi, G^0\psi)$, определяющие главные оси «эллипсоида» $(\varphi, \Omega\varphi) = 1$ в метрике G^0 , т. е. при чисто статистической трактовке λ_q — это отношения априорной и апостериорной дисперсий координаты (параметра) в данном направлении. Система функций $\{\psi_q\}$, как легко убедиться, обладает свойством двойной ортогональности (см. гл. 3):

$$(\psi_q, G^0\psi_r) = (\psi_q, \Omega\psi_q) = 0, \quad \lambda_q \neq \lambda_r. \quad (8.32)$$

Кроме того, условие нормировки дает

$$(\psi_q, G^0\psi_q) = \lambda_q(\psi_q, \Omega\psi_q) = 1. \quad (8.33)$$

Решение регуляризованной задачи

$$(K^*WK + \alpha\Omega)\varphi = K^*Wf \quad (8.34)$$

можно записать теперь в виде разложения по базису

$$\varphi = \sum_q \eta_q \psi_q, \quad (8.35)$$

позволяющему представить координаты как независимые фрагменты нетривиальной информации. При этом устанавливается прямая связь между собственными числами λ_q , известным выражением для количества информации по Шеннону

$$J = 0,5 \sum_q \log(1 + \lambda_q), \quad (8.36)$$

а также «информационным объемом» [95]:

$$V = \prod_{\lambda_q > 1} \lambda_q^{1/2}. \quad (8.37)$$

Сама задача (8.34) распадается на систему независимых уравнений

$$\eta_q(\lambda_q + \alpha) = \lambda_q(K^*Wf, \psi_q). \quad (8.38)$$

Таким образом, решение задачи предстает в форме

$$\varphi = \sum_q \theta_q(\lambda) (K^* W f, \psi_q) \psi_q, \quad (8.39)$$

где функция $\theta_q(\lambda) = \lambda/(\lambda + \alpha)$ характеризует дискриминацию малоинформативных компонентов $\{\varphi_m\}$. В работе [95] обсуждалась также возможность иного выбора дискриминирующей функции:

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq 1, \\ 0, & \lambda < 1. \end{cases} \quad (8.40)$$

По поводу описанной процедуры уместно сделать несколько общих замечаний. Поскольку элементы информационной матрицы Фишера преобразуются как компоненты дважды ковариантного тензора [127], решение задачи на собственные значения (8.31) не зависит от исходного выбора базисов в пространствах Φ и F ($K : \Phi \rightarrow F$). Это решение характеризуется весьма большой устойчивостью, и притом нет необходимости решать задачу полностью, ибо компоненты с $\lambda_q \ll 1$ заведомо не представляют интереса, а при выборе дискриминирующей функции в виде (8.40) их число еще сокращается. Вся полезная информация сосредоточена в числах $\{(K^* W f, \psi_q)\}$, что часто можно использовать для «сжатия» данных и устранения «избыточности» данных, характеризуемой отношением $\dim(F)/Q_{\text{eff}}$, где $Q_{\text{eff}} = \max\{q : \lambda_q \geq 1\}$ — число существенных членов разложения в (8.39). Тем самым открывается возможность оптимального планирования диагностического эксперимента.

В задачах диагностики плазмы часто первостепенный интерес может представлять проблема анализа информационной структуры не столько самого решения $\varphi(x)$, сколько тех или иных функционалов от этого решения. Риманова информационная метрика позволяет в таком случае сравнительно просто получить важные количественные и качественные оценки. Проиллюстрируем это простым примером [97], относящимся к обратной задаче о деконволюции свертки. Если $\varphi^{(1)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$ — две искомые функции, разделенные информационным интервалом ρ , то, как легко подсчитать,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|^2 = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}_\xi^{-1}(\omega) |\tilde{K}(\omega)|^2 |\tilde{\varphi}^{(1)}(\omega) - \tilde{\varphi}^{(2)}(\omega)|^2 d\omega \quad (8.41) \end{aligned}$$

(обозначения те же, что и в гл. 3,7). Определим линейный функционал

$$A_{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \varphi(x) dx \quad (8.42)$$

с помощью весовой функции $a(x)$. Пусть для сферы неопределенности (8.30) $\varphi^{(0)} \equiv 0$, а

$$\|A_{\varphi}\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \varphi(x) dx \right| \quad (8.43)$$

— максимальное значение функционала на этой сфере, имеющее смысл предельной погрешности, неустранимой при любом способе вычисления функционала A_{φ} по ре-

$$\text{ализации } f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y) \varphi(y) dy.$$

Для определения $\|A_{\varphi}\|$ можно воспользоваться теоремой о норме функционала в гильбертовом пространстве [91] и тождеством Парсеваля. Это дает

$$\|A_{\varphi}\|^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{a}(\omega)|^2 \tilde{R}_{\xi}(\omega) |\tilde{K}(\omega)|^{-2} d\omega. \quad (8.44)$$

Сравнивая (8.44) с (3.9), видим, что $\|A_{\varphi}\|^2$ фактически представляет собой дисперсию ошибки, обусловленной случайным шумом, при вычислении функционала A_{φ} . Из (8.44) легко заключить, что в реальной ситуации класс допустимых функционалов ($\|A_{\varphi}\|^2$ меньше некоторой наперед заданной положительной величины) состоит из функционалов с весовыми функциями $a(x)$, существенно более гладкими, чем ядро $K(x)$. В частности, если «функционалами» считать значения φ в заданных точках x_i , т. е. полагать $a(x) = \delta(x - x_i)$, то в отсутствие регуляризации такие «функционалы» явно недопустимы. При наличии той или иной фильтрации, например при замене в (8.44) множителя $|\tilde{K}(\omega)|^{-2}$ на $[|\tilde{K}(\omega)|^2 + \tilde{R}_{\xi}(\omega)/\tilde{R}_{\varphi}(\omega)]^{-1}$, согласно (7.9), класс допустимых функционалов A_{φ} расширяется, и для информационного анализа соответствующих задач применимы схемы, описанные в гл. 7.

В спектральных диагностических методах весьма часто используются интегральные (по длинам волн λ) харак-

теристики: относительные полные интенсивности линий или участков континуума, методы линейчатого поглощения и т. п. [166]. Рассмотрим следующий типичный случай:

$$\begin{aligned}
 a(x) \equiv a(\lambda) &= \exp \left\{ - (\lambda - \lambda_0)^2 / 2(\Delta\lambda)^2 \right\}; \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} K(vt - \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda + \xi(t) &= f(t); \quad (8.45) \\
 \tilde{K}(\omega) &= 2b_1 C \exp \left[- (1/2) (1 + b^2) b_1^2 \omega^2 \right]; \\
 \tilde{R}_\xi(\omega) &= R_0 = \text{const.}
 \end{aligned}$$

В (8.45) предполагается, что весовая функция — узкополосный фильтр с шириной полосы пропускания $\Delta\lambda$, v — скорость сканирования по длинам волн, t — время, b — ширина щели спектрального прибора в дифракционных единицах, b_1 — дифракционная составляющая спектральной ширины аппаратной функции $K(\lambda)$, C — произведение телесного угла на сечение светового пучка в приборе, на чувствительность приемника и на ширину щели b . Шум предполагается белым. Подстановка выражений из (8.45) в (8.44) дает

$$\|A_\varphi\|^2 = \pi^{1/2} \cdot v R_0 (\Delta\lambda/b_1)^2 / 2C^2 [(\Delta\lambda)^2 - b_1(1 + b^2)]. \quad (8.46)$$

Анализ формулы (8.46) элементарен. Отметим лишь такой нетривиальный результат: ошибка остается конечной при условии

$$\Delta\lambda > b_1(1 + b^2)^{1/2}, \quad (8.47)$$

а оптимальная ширина щели b_{opt} , обеспечивающая минимум величины $\|A_\varphi\|^2$, определяется формулой

$$b_{\text{opt}} = 2 \left[((\Delta\lambda)^2/b_1^2 - 1)/5 \right]^{1/2}. \quad (8.48)$$

Разумеется, указанные выводы относятся к нерегуляризованной постановке задачи. Информационный анализ аналогичных проблем с привлечением методов дескриптивной регуляризации еще не производился, хотя и представляет очевидный практический интерес.

Обратим внимание еще на один аспект проблемы информационного анализа многопараметрических задач. В диагностической практике распространен случай, когда выделяются две группы параметров нелинейной задачи,

которым мы поставим в соответствие векторы φ и μ . Компонентами $\varphi = \{\varphi_m\}$, $m = 1, 2, \dots, M$, являются неизвестные параметры; компонентами $\mu = \{\mu_j\}$, $j = 1, 2, \dots, J$, служит набор параметров, который известен заранее с некоторой погрешностью, поскольку связан с привлечением дополнительных экспериментальных данных. Задачу можно записать в виде системы нелинейных уравнений

$$K_n(\varphi, \mu) = f_n; \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (8.49)$$

и поставить вопрос о том, насколько существенным будет влияние погрешностей f и μ на точность восстановления компонентов φ . Например, заранее не очевидно, что следует непременно решать M -параметрическую задачу, если погрешности некоторых компонентов μ_j достаточно велики. Итак, в простейшей (нерегуляризованной) постановке в рамках метода максимума правдоподобия либо его конкретных версий, определяемых выбором меры приближения искомой функции (наименьших квадратов, экстремальных модулей и т. п.), необходимо изучить структуру ковариационной матрицы задачи:

$$D_\varphi = D_\varphi^{(f)} + D_\varphi^{(\mu)}, \quad (8.50)$$

где $D_\varphi^{(f)}$ и $D_\varphi^{(\mu)}$ соответственно обусловлены погрешностями измерений вектора f и влиянием неточности задания вектора μ на вектор φ . В такой постановке задача решалась в работах [180, 181].

Введем разностный вектор x с компонентами $x_n = f_n - K_n(\varphi, \mu)$, относительно которого система уравнений метода максимума правдоподобия запишется в виде

$$\partial(x, Wx)/\partial\varphi_m = 0, \quad (8.51)$$

где, как и ранее, W^{-1} — ковариационная матрица вектора f . Поскольку квадратичная форма, фигурирующая в (8.51), эрмитова, систему можно представить как

$$(\partial K(\varphi, \mu)/\partial\varphi_m, Wx) = 0. \quad (8.52)$$

Ее решение определяет вектор φ , зависящий от реализаций f и μ . Пусть ξ_φ , ξ_f и ξ_μ — погрешности, с которыми находятся все три вектора; полагая их малыми по сравнению с соответствующими математическими ожиданиями

$\langle \dots \rangle$, запишем тейлоровское разложение \mathbf{K} в окрестности точки $(\langle \varphi \rangle, \langle \mu \rangle)$

$$\mathbf{K} = \langle f \rangle + (\partial \langle f \rangle / \partial \varphi, \xi_\varphi) + (\partial \langle f \rangle / \partial \mu, \xi_\mu) + \dots \quad (8.53)$$

где учтено, что $\mathbf{K}(\langle \varphi \rangle, \langle \mu \rangle) = \langle f \rangle$. Подставляя (8.53) в (8.52) и ограничиваясь членами первого порядка малости по ξ , приходим к следующему уравнению:

$$G \xi_\varphi = X_\varphi^* W \xi_f - Y \xi_\mu. \quad (8.54)$$

Здесь квадратная $G (M \times M)$ и прямоугольная $Y (J \times M)$ матрицы определяются через две вспомогательные:

$$X_\varphi = \begin{vmatrix} \partial K_1 / \partial \varphi_1 & \dots & \partial K_1 / \partial \varphi_M \\ \vdots & & \vdots \\ \partial K_N / \partial \varphi_1 & \dots & \partial K_N / \partial \varphi_M \end{vmatrix},$$

$$X_\mu = \begin{vmatrix} \partial K_1 / \partial \mu_1 & \dots & \partial K_1 / \partial \mu_J \\ \vdots & & \vdots \\ \partial K_N / \partial \mu_1 & \dots & \partial K_N / \partial \mu_J \end{vmatrix}$$

по формулам

$$G = X_\varphi^* W X_\varphi, \quad Y = X_\varphi^* W X_\mu. \quad (8.55)$$

Поскольку физический смысл векторов f и μ позволяет считать их некоррелированными, можно записать общее выражение для ковариационной матрицы D_φ , выделяя, согласно (8.50), обе ее составляющие:

$$D_\varphi^{(f)} = G^{-1}, \quad D_\varphi^{(\mu)} = R W_\mu^{-1} R^*, \quad (8.56)$$

где $R = G^{-1} Y$, W_μ^{-1} — ковариационная матрица вектора μ , а G — нерегуляризованная матрица Фишера с элементами (8.24). Если бы $D_\varphi^{(f)} = 0$, то, как и следовало ожидать, оказалась бы справедливой формула (8.26), поскольку в ходе преобразований оператор задачи был линеаризован.

Детальный анализ вклада в D_φ , обязанного члену $D_\varphi^{(\mu)}$, показывает, что второе слагаемое в (8.50) может стать вполне соизмеримым с первым, а зачастую и превосходить его. Таким образом, не столь уж редки случаи, когда априорный информационный анализ задачи приводит к выводу о том, что тот или иной «плохо» измеренный

параметр μ_j целесообразнее считать неизвестным, т. е. перевести соответствующий компонент из вектора μ в вектор φ .

Именно такая ситуация может иметь место, например, в задачах по спектроскопии высокого разрешения, реализуемых с помощью интерферометра Фабри — Перо по схеме просвечивания [84, 85]. В данном случае простейшая постановка задачи сводится к анализу дублета из равноинтенсивных и равноуширенных составляющих, характеризуемых профилем Фойгта и заданным расстоянием между их центрами. Тогда к компонентам вектора φ можно отнести лоренцеву полуширину (φ_1) и положение максимума длинноволновой составляющей (φ_2); в качестве μ_1 и μ_2 обычно принимают соответственно доплеровскую полуширину и нормировочный фактор, определяющий интегральную интенсивность. При этом, как показывают расчеты [181], в некоторых практически интересных случаях погрешность μ_2 оказывается столь значительной, что рациональнее решать трех-, а не двухпараметрическую задачу, полагая $\varphi_3 = \mu_2$.

В общем случае корреляцию между μ_i можно не учитывать и тогда окончательная оценка дисперсии $\sigma^2[\varphi_m]$ производится по формуле

$$\sigma^2[\varphi_m] = G_{mm}^{-1} + \sum_{j=1}^J \sigma^2[\mu_j] |R_{mj}|^2. \quad (8.57)$$

Часто для оценок удобно бывает ввести своего рода «коэффициент усиления» погрешности [27] γ_m при нахождении некоторого параметра

$$\gamma_m = \sigma[\varphi_m] \cdot \|f\| \cdot |\varphi_m|^{-1} s_f^{-1}, \quad (8.58)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора экспериментальных данных, а s_f^2 — усредненная по набору отсчетов в n точках дисперсия (в предположении нормального закона распределения погрешностей (7.38)). Таким образом, γ_m есть отношение коэффициентов вариации m -го параметра и данных эксперимента.

Хотя выражение для дисперсии $\sigma^2[\varphi_m]$ через диагональные элементы матрицы Фишера в случае нелинейной задачи является лишь приближенным (это относится, конечно, и к формуле (8.57)), оценки коэффициентов γ_m , согласно (8.58), с точки зрения планирования диагности-

ческого эксперимента, как правило, полезны и конструктивны. Приведем два примера.

В спектроскопии оптически плотной плазмы [174] часто используются различные приемы однопараметрического представления функции источника, позволяющие получить простые аналитические выражения для контура линии излучения $I(\nu - \nu_0)$, где ν — текущая (безразмерная) частота, ν_0 — центр линии, для простоты принимаемой симметричной. Так, в рамках известной модели Бартеляса, широко применяемой, например, в пирометрии плазмы, выражение для $I(\nu - \nu_0)$ записывается в виде

$$I(\nu - \nu_0) \equiv I(\tau) = \exp(-\tau/2) [(1 - q)\tau/2 + q \operatorname{sh}(\tau/2) + q^{-1/2} \operatorname{sh}(q^{1/2}\tau/2)], \quad (8.59)$$

где $\tau = 2pQ(\nu - \nu_0)$ — оптическая толщина слоя плазмы, p ($0 \leq p < \infty$) — безразмерный параметр, $Q(\nu - \nu_0)$ — нормированный по максимуму профиль линии испускания (поглощения) в пределе $p \rightarrow 0$; форма этого профиля обычно считается заранее известной. Одна из простейших постановок обратной задачи на основе (8.59) трехпараметрическая. Именно, подлежат определению по регистрируемому контуру $I(\nu - \nu_0)$ параметры p , q ($0 \leq q \leq 1$), которым задается функция источника, и δ — полуширина контура для оптически прозрачного слоя: $Q(\delta) = 1/2$.

В ранних работах по диагностике плазмы обычно избегали решения переопределенных систем нелинейных уравнений и стремились находить p , q и δ по таким трем значениям функционалов от $I(\nu - \nu_0)$, которые удобно регистрируются в ходе обработки эксперимента и отражают типичные структурные особенности контура линии с самообращением. В качестве таких функционалов часто выбирались глубина «провала» самообращения $I(\tau = 2pQ(\nu_0))/I_{\max}$, расстояние между пиками самообращения $2(\nu_{\max} - \nu_0)$, где $I(\tau = 2pQ(\nu_{\max} - \nu_0)) = I_{\max}$, и ширина контура $2(\nu_{1/2} - \nu_0)$, где $I(\tau = 2pQ(\nu_{1/2} - \nu_0))/I_{\max} = 1/2$. Из общих соображений ясно, что привлечение для нахождения p , q , δ большего числа отсчетов на контуре $I(\nu - \nu_0)$ с соответствующим решением переопределенной задачи методом наименьших квадратов позволит определить неизвестные параметры точнее [171].

Таблица 2

$\gamma_\delta (\delta=1)$		$\gamma_q (q=0,5)$		$\gamma_p (p=5)$	
$n=3$	$n=30$	$n=3$	$n=30$	$n=3$	$n=30$
14,5	3,8	21,0	5,8	33,4	8,6
—	—	2,9	1,2	1,9	0,8
2,0	0,8	—	—	3,0	1,3
0,8	0,4	1,9	0,9	—	—
—	—	—	—	0,8	0,5
0,5	0,3	—	—	—	—
—	—	1,3	0,8	—	—

В табл. 2 приведены некоторые характерные результаты вычисления γ_m при фиксированных значениях самих параметров (на самом деле γ_m при изменении этих параметров меняются довольно сложно, но порядки величин обычно сохраняются)¹⁾. Сравнивались γ_m для $n=3$, когда исходными данными считались величины указанных ранее трех функционалов, и для $n=30$, когда на равномерной сетке брались значения $I(v-v_0)$ в тридцати узлах. В расчетах учитывалось наложение линии на подстилающий континуум ($\tau_{\text{const}} = 0,2$), профиль $Q(v-v_0)$ принимался дисперсионным, а в ходе моделирования в $I(v-v_0)$ вводился случайный шум с дисперсией $s_j^2 = 0,05$. Прочерки в таблице означают, что в данном случае решалась уже не трех-, а двух- или однопараметрическая задача, а отсутствующие один либо два параметра считались заданными.

Выводы, следующие из этих расчетов, достаточно очевидны. Во-первых, ясно, что постановка уже трехпараметрической задачи при $n=3$ фактически беспредметна (на это одним из авторов указывалось давно [173]). Во-вторых, существенно, что при переходе к $n=30$ та же задача уже приобретает смысл, особенно если речь идет о восстановлении полуширины δ , т. е. о редукции контура к условиям оптически прозрачного слоя. В-третьих, уменьшение числа искомых параметров с трех до двух (и тем более до одного) кардинально меняет ситуацию,

¹⁾ Эта серия расчетов выполнена Л. Л. Фруминим; соответствующая работа еще не опубликована.

Таблица 3

$L \backslash \gamma_m$	γ_{a_1}	γ_{b_1}	γ_{a_2}	γ_{b_2}	γ_{a_3}	γ_{b_3}
1	0,4	0,6	—	—	—	—
2	392	60	588	81	—	—
3	8243	2321	14 600	1616	1138	221

обеспечивая хорошее восстановление даже при $n = 3$ (и подавно при $n = 30$).

Рассмотрим другой пример. В спектроскопии оптического смещения, как мы уже видели в § 5, некоторые экспериментальные схемы приводят к необходимости решения внешне простого интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с неразностным экспоненциальным ядром

$$\int_0^{\infty} \varphi(y) \exp(-xy) dy = f(x). \quad (8.60)$$

В обзоре Камминса [90] в связи с этим обсуждается ряд параметрических подходов к задаче, причем во многих случаях из чисто физических соображений представляется приемлемой следующая простая модель полидисперсности частиц:

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \sum_{l=1}^L a_l \delta(y - b_l^{-1}), \\ f(x) &= \sum_{l=1}^L a_l \exp(-x/b_l). \end{aligned} \quad (8.61)$$

Здесь δ — символ дельта-функции Дирака, т. е. предполагается, что система состоит из смеси сфер с несколькими значениями радиуса.

Один из результатов информационного анализа задачи представлен в табл. 3²⁾. В (8.61) взято: $a_1 = 0,3$; $b_1 = 9$; $a_2 = 0,2$; $b_2 = 12$; $a_3 = 0,4$; $b_3 = 5$; число членов суммы L равнялось 1, 2 и 3, т. е. задача была двух-, четырех- и шестипараметрической. «Овражный» тип ядра $\exp(-xy)$ оказывается чрезвычайно неблагоприятным для восстановления размеров сфер и их содержания в смеси, даже

²⁾ Расчеты выполнены А. И. Седельниковым.

если эта смесь всего двухкомпонентна (правда, положение несколько облегчается, если находить лишь три параметра: b_1 , b_2 и a_1/a_2). Анализ трехкомпонентной смеси практически невыполним, если задачу не доопределить какими-то дополнительными априорными сведениями о $f(y)$. В гл. 5 на примере расчетов Туоми мы уже имели возможность убедиться в эффективности такого рода доопределения, представляющего собой типичный пример дескриптивной регуляризации задачи (см. табл. 1).

Г Л А В А 9

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В предыдущих главах мы неоднократно встречались со случаями использования тех или иных полиномиальных разложений при конструировании регуляризирующих алгоритмов. В частности, на таких разложениях чаще всего и основывались те ранние способы решения неустойчивых задач, которые с точки зрения современного уровня теории подчас выглядят архаичными. Однако, основываясь на такого рода примерах, было бы неверно относить всю «полиномиальную идеологию» к пройденному этапу. Напротив, именно в самое последнее время разработка новых регуляризирующих алгоритмов, в существенной степени связанных с полиномиальным подходом к задаче (особенно многомерной), предопределила конечный успех. В качестве яркого примера можно привести обсуждаемые ниже алгоритмы А. Кормака, который за внесенный им фундаментальный вклад в развитие компьютерной томографии был вместе с инженером-конструктором Г. Хаунсфилдом удостоен Нобелевской премии по медицине 1979 г. [275, 302].

В этой главе мы кратко обсудим технику полиномиальных разложений и получаемые с ее помощью результаты, базируясь всего на одном, но исключительно важном для плазменной диагностики классе задач. Речь будет идти о методах косвенной локальной диагностики неоднородных объектов, когда от измеряемых по определенному на-

бору лучей зрения интегральных радиационных характеристик (интенсивностей излучения, трансмиссионных функций, набегов фаз световой волны, фарадеевских углов поворота плоскости поляризации и т. п.) требуется перейти к локальным величинам: коэффициентам испускания, поглощения, показателю преломления, магнитной индукции и т. д. От этих величин, в свою очередь, возможен переход к концентрациям и температурам основных компонентов плазмы, к кинетическим коэффициентам (диффузии, вязкости, электро- и теплопроводности), теплоемкостям, радиационным потерям и др.

Рассмотрим последовательно одномерные и двумерные задачи косвенной локальной диагностики.

§ 1. Одномерные (осесимметричные) задачи

Библиография по данной проблеме начинается, по-видимому, с работы Маха, датированной еще 1896 г. [323]. После сравнительно немногочисленных работ, выполненных до 1950 г. [266, 303, 319, 355, 382], начался в буквальном смысле поток исследований, главным образом эвристического характера, связанных с абелевой инверсией; обзорный материал по этим вопросам содержится, например, в публикациях [114, 115, 166, 261, 283, 332].

Для более ясного обсуждения алгоритмической стороны дела напомним расчетную схему (рис. 24), где R — радиус столба плазмы в выбранном сечении, r — расстояние от центра до произвольной точки на луче зрения, $x = r_{\min}$ — кратчайшее расстояние от центра до рассматриваемого луча, вдоль которого измеряется величина

$$f(x) = \int_l \varphi(x, y) dy, \quad (9.1)$$

$\varphi(x, y)$ — восстанавливаемая локальная характеристика из числа упомянутых, причем для эмиссион-

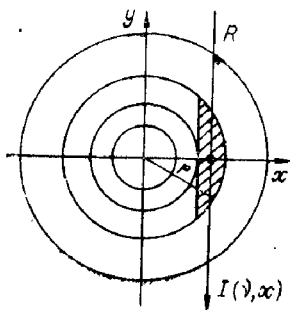


Рис. 24. Геометрическая схема регистрации излучения от осесимметричного источника.

ных и фазовых измерений мы будем пренебрегать рефракцией, рассеянием, реабсорбцией, конечными размерами детектора. Кроме того, все рассмотрение может проводиться в монохроматическом пределе, вследствие чего частотные характеристики не указываются.

В полярной системе координат вместо (9.1) запишем:

$$f(x) = 2 \int_x^R r (r^2 - x^2)^{-1/2} \varphi(r) dr, \quad (9.2)$$

причем формальное обращение формулы (9.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= -(\pi r)^{-1} d \left[\int_r^R x (x^2 - r^2)^{-1/2} f(x) dx \right] / dr = \\ &= -\pi^{-1} \int_r^R (x^2 - r^2)^{-1/2} f'(x) dx. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Здесь неявно предполагается, что: 1) $f(R) = df/dx|_{x=R} = 0$; 2) экспериментальный сигнал $f(x)$ обладает свойством непрерывной дифференцируемости, т. е. $f(x) \in C^{(1)}$. Если на практике первое условие обычно удовлетворяется и часто даже служит для определения величины R , то второе, как правило, нарушается. Именно попытками обойти указанную трудность в значительной мере объясняется отмеченное ранее обилие работ на эту тему. Другая несомненная причина заключается в широкой распространенности осесимметричной модели, применяемой для пересчетов от интегральных характеристик к локальным, в самых разнообразных областях науки и техники (см. по этому поводу обзор [176]).

Элементарной заменой переменных (9.2) преобразуется к канонической форме линейного интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода типа Абеля

$$\int_a^x (x-y)^{-\alpha} \varphi(y) dy = f(x), \quad (9.4)$$

где в общем случае $0 < \alpha < 1$, $a \geq 0$, $a \leq x \leq b$. Как и раньше, если $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, уравнение Абеля (9.4) имеет единственное непрерывное решение:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \pi^{-1} \sin(\alpha\pi) d \left[\int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy \right] \Big| dx = \\ &= \pi^{-1} \sin(\alpha\pi) \left[(x-a)^{\alpha-1} f(a) + \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f'(y) dy \right]. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Существует еще одно важное представление решения:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(x) &= \pi^{-1} \sin(\alpha\pi) \left[(x-a)^{\alpha-1} f(x) + \right. \\ &\left. + (1-\alpha) \int_a^x (x-y)^{\alpha-2} \{f(x) - f(y)\} dy \right]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Формула (9.6) в отличие от (9.5) требует от $f(x)$ лишь выполнения условия Гёльдера с гёльдеровским показателем $\lambda > 1 - \alpha$. Тонелли показал (см. ссылки в [176]), что если $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то формулой (9.5) определяется единственное решение уравнения (9.4) в классе функций, интегрируемых по Лебегу.

Для дальнейшего полезно указать некоторые частные решения уравнения Абеля. Полагая в (9.4) $a = 0$, $\alpha = 0,5$, получим:

а) $f(x) = \text{const}$ — классическая задача о таутохроне. Решение обычно записывается в параметрической форме: $x = C(2\psi + \sin 2\psi)$, $y = C(1 - \cos 2\psi)$ (C — константа интегрирования, ψ — угол между осью x и касательной к таутохроне) и определяет циклоиду;

б) $f(x) = x^{-1/2}$, решение — прямые линии;

в) $f(x) = x^{1/2}$, $\varphi(x) = 1/2$;

г) $f(x) = \exp x$; $\varphi(x) = \pi^{-1} \left(x^{-1/2} + e^x \int_0^x e^{-t} t^{-1/2} dt \right)$.

С точки зрения некоторых рассматриваемых далее полиномиальных разложений представляют интерес такие результаты.

I. Уравнение Абеля — Шмайdlера

$$\int_0^x (x-y)^\beta \varphi(y) dy = x^\mu, \quad \mu \geq 0, \quad \beta > -1, \quad (9.7)$$

с решением

$$\varphi(x) = [\Gamma(\mu + 1)/\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\mu - \beta)]x^{\mu-\beta-1}; \quad (9.8)$$

заметим, что при $\beta = 1$, $\mu = 2$ $\varphi(x) = 2$; при $\beta = 2$, $\mu = 3$ $\varphi(x) = 3$.

II. Уравнение Абеля с бесконечным пределом

$$\int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} \varphi(y) dy = f(x). \quad (9.9)$$

Для достаточно быстро убывающих на бесконечности функций $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha-2}$ остается справедливым общее решение (9.5) с заменой a на $-\infty$. Если же $f(x)$ имеет на бесконечности нуль произвольного порядка, то решение имеет вид

$$\varphi(x) = \pi^{-1} (1 - \alpha) \sin(\alpha\pi) \int_0^{\infty} y^{\alpha-2} [f(x) - f(x-y)] dy. \quad (9.10)$$

Обратим внимание, что к уравнению типа (9.9) приводит задача восстановления распределения по размерам сферических частиц, погруженных в непрозрачную среду, по измерениям сегментов, образуемых при пересечении частиц случайными плоскостями. Подобного рода проблемы возникают, например, при диагностике многофазных потоков нагретого газа и низкотемпературной плазмы [202]; уравнение (9.9) появляется также в астрономии в связи с известной задачей глобулярного скопления [370].

III. Двумерное уравнение Абеля

$$\int_D [(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2]^{-1/2} \varphi(x, y) dx dy = f(x_0, y_0), \quad (9.11)$$

где D — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой на оси x и с вершиной в точке (x_0, y_0) , с решением

$$\varphi(x, y) = (2\pi^2)^{-1} [\partial^2 \hat{f} / \partial y^2 - \partial^2 \hat{f} / \partial x^2]. \quad (9.12)$$

$$\text{Здесь } \hat{f}(x, y) = \int_{D_1} [(y-v)^2 - (x-u)^2]^{-1/2} f(u, v) dudv,$$

D_1 — равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной в точке (x, y) и гипотенузой на оси u плоскости

ив. Уравнение (9.11) находит многочисленные важные приложения, например при исследовании отражения волн от прямолинейной границы [54].

Перейдем теперь непосредственно к характеристике методов абелевой инверсии уравнения (9.2) с привлечением полиномиальных разложений. Мы здесь не останавливаемся на очевидном факте некорректности задачи с учетом погрешности реального эксперимента.

Опустим комментарии, касающиеся самых ранних работ, и охарактеризуем кратко результаты, изложенные в публикациях начиная примерно с 1960 г. В работах [66, 72, 258, 264, 281, 290, 335] использовались степенные полиномы по r или x невысокой степени. После подстановки полиномов по r в уравнение (9.2) задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Если использовать полиномы по x , то из уравнения (9.3) обычно можно получить аналитическое выражение для коэффициента излучения, что позволяет определить искомую функцию $\varphi(r)$ в любой точке r . Поскольку эти расчетные схемы чувствительны к случайным возмущениям регистрируемого сигнала $f(x)$, появилась тенденция к сглаживанию результатов измерений полиномами методом наименьших квадратов [277, 284, 310], чаще всего сразу по всему набору экспериментальных точек с выбором ортогональной системы полиномов [115, 286, 293, 295, 299, 311, 325, 332, 366].

Следует отметить, что в указанных работах еще нет достаточно полного и корректного исследования величины ошибки в восстановленной функции $\varphi(r)$ в зависимости от степени «зашумленности» входных данных $f(x)$.

Применение полиномов все более высокой степени N при наличии шумов в $f(x)$ приводит к нарастающим ошибкам в производной $f'(x)$ [232], а следовательно, и в $\varphi(r)$. Очевидно, что необходимо определять оптимальное число полиномов в разложении, причем оно существенно зависит от величины экспериментальной ошибки. В связи с большой важностью подобного выбора, необходимо искать критерии, достаточно чувствительные к шуму в $f(x)$. Критерий, использованный в работах [262, 282, 332, 366] (минимизация нормы вектора невязки), такими свойствами не обладает. В некоторых работах использовались различные статистические критерии по ограничению числа членов в разложениях рядами [103, 123].

В качестве иллюстрации свойств некоторых весьма распространенных методов перехода к локальным характеристикам рассмотрим коэффициент усиления ошибки $\hat{\gamma}$, квадрат которого определяется здесь (для объекта единичного радиуса) как отношение дисперсии восстановления модельной функции, обязанной наличием помех в измерениях $f(x)$, к дисперсии последних. Схема решения задачи сводится к выражению

$$\varphi = T f, \quad (9.13)$$

где T — матрица перехода, различная в рассматриваемых подходах. Дисперсия компонентов вектора φ запишется в виде

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n T_{ij}^2 s_j^2, \quad (9.14)$$

где s_j^2 — дисперсия компонентов f . Если $s_j = s = \text{const}$, то

$$\hat{\gamma}_i = \sigma_i / s = \left(\sum_{j=1}^n T_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (9.15)$$

Такая характеристика позволяет еще до реальной обработки эксперимента сделать оценки погрешности восстановления по максимуму ошибки измерений.

На рис. 25 приведены коэффициенты усиления $\hat{\gamma}(r)$ для некоторых распространенных табличных методов, реализующих схему (9.13). Здесь же для сравнения приведена функция $\hat{\gamma}(r)$ для метода статистической регуляризации [164].



Рис. 25. Усиление случайной ошибки эксперимента в различных методах решения уравнения Абеля (при размерности вектора решения $n = 40$).

1 — метод [264]; 2 — [130]; 3 — [135], $n = 30$; 4 — [122]; 5 — [164].

Рассмотрим несколько подробнее особенности метода Бокастена [264], являющегося одним из популярных способов решения интегрального уравнения Абеля в случае точного задания функции $f(x)$. В этом методе за основу берется формула (9.3), которая далее преобразуется таким образом:

$$\varphi(r_i) = -(\pi R)^{-1} \sum_{j=i}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x^2 - r_i^2)^{-1/2} f'(x) dx. \quad (9.16)$$

Здесь n — число интервалов, на которые разбит радиус неоднородности: $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$. Далее на каждом интервале разбиения функция $f(x)$ аппроксимируется полиномом 3 -й степени:

$$f_j(x) \equiv P_j(x) = \sum_{l=0}^3 C_{jl} x^l, \quad (9.17)$$

проходящим по точкам $f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}$. После замены переменных x, r (которые уже приведены к радиусу R)

$$x = t/n, \quad t \in [0, n], \quad (9.18)$$

$$r_i = i/n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

получаем из (9.16)

$$\varphi_i = -n(\pi R)^{-1} \sum_{j=i}^{n-1} \int_j^{j+1} (t^2 - i^2)^{-1/2} P_j'(t) dt. \quad (9.19)$$

После подстановки в (9.19) выражения (9.17), в котором коэффициенты C_{jl} выражаются через значения f_{j-1}, f_j, f_{j+1} и f_{j+2} , получаем окончательную матричную запись:

$$\varphi_i = \sum_j T_{ij} f_j, \quad (9.20)$$

где элементы матрицы T записываются в виде

$$T_{ij} = (nR/12\pi)[F(i, j+2) - 4F(i, j+1) + 6F(i, j) - 4F(i, j-1) + F(i, j-2)]. \quad (9.21)$$

Здесь вспомогательная функция F

$$F(i, j) = (3i^2 + 6j^2 - 2) \ln(j + (j^2 - i^2)^{1/2}) - 9j(j^2 - i^2)^{1/2}, \quad (9.22)$$

в выражении (9.21) $(i+1) < j < (n-2)$, а в формуле (9.22) $i \leq j \leq (n-1)$, $j > 0$, $i < (n-1)$. Некоторые из коэффициентов T_{ij} записываются особым образом из-за влияния аппроксимаций на концах отрезка $[0, R]$. В частности, по отдельным формулам подсчитываются элементы $T_{i, i-1}$, T_{ii} , $T_{i, i+1}$, $T_{i, n-2}$, $T_{i, n-1}$ и T_{02} . В работе [264]

приведены таблицы для T_{ij} при $n = 10$, $n = 20$. Для более точного расчета внешней области приводится часть таблицы ($i \geq 30$) для $n = 40$. В работе [123] случай $n = 40$ затабулирован полностью.

Существенным свойством рассматриваемой матрицы T является увеличение примерно на порядок точности расчета $f(r_i)$ при увеличении числа отсчетов n в 2 раза. Этот вывод получен в работе [264] на точно заданных модельных функциях различного вида:

$$f(x) = 1 - x^4; \quad (9.23a)$$

$$f(x) = 1 - 3x^2 + 8x^4 - 6x^2; \quad (9.23б)$$

$$f(x) = (2/3)(1 - x^2)(1/4 - (1 + 4x^2)(1 - x^2)^{1/2}). \quad (9.23в)$$

Наиболее серьезным недостатком метода является его большая чувствительность к шуму, которая увеличивается с ростом числа отсчетов пропорционально n и для $n = 40$ весьма велика (см. рис. 25). В работе [122] предложенный Бокастеном прием сглаживания экспериментальных точек использовался для улучшения расчетных таблиц. При этом вводилось сглаживание методом наименьших квадратов проведением полинома третьей степени по семи соседним точкам. Для сглаженных величин \bar{f}_j применялись формулы

$$\bar{f}_j = [-2f_{j-3} + 3f_{j-2} + 6f_{j-1} + 7f_j + 6f_{j+1} + 3f_{j+2} - 2f_{j+3}]/21; \quad (9.24a)$$

$$\bar{f}_{n-2} = [f_{n-6} - 4f_{n-5} + 2f_{n-4} + 12f_{n-3} + 19f_{n-2} + 16f_{n-1}]/42; \quad (9.24б)$$

$$\bar{f}_{n-1} = [4f_{n-6} - 7f_{n-5} - 4f_{n-4} + 6f_{n-3} + 16f_{n-2} + 19f_{n-1}]/42. \quad (9.24в)$$

Для определения \bar{f}_0 , \bar{f}_1 и \bar{f}_2 Бокастен использовал зеркальное отражение точек $f_{-1} = f_1$, $f_{-2} = f_2$, $f_{-3} = f_3$. Полученные в результате таблицы [122] обладают существенно меньшим коэффициентом усиления случайного шума (примерно в 4 раза, см. рис. 25) при незначительном ухудшении точности аппроксимации обратного интегрального оператора (9.3).

Рассмотренный метод Бокастена [264] с его модификацией [122] является типичным представителем класса методов, в которых фиксируется полином невысокой степени и проводится аппроксимация этим полиномом функции $f(x)$ (либо $\varphi(r)$) на отрезках разбиения $[x_j, x_{j+1}]$ (либо $[r_i, r_{i+1}]$). Точность приближения повышается уменьшением шага разбиения сетки $\{x_j\}$ (либо $\{r_j\}$). Информация об экспериментальном шуме при этом процессе решения никак не используется.

Другой, более общий и гибкий подход к решению интегрального уравнения Абеля, реализуется в методах, основанных на разложениях по системам ортогональных полиномов.

Рассмотрим для иллюстрации метод Герлитца [299]. Его основа, как и других подобных подходов [332], — использование пар интегральных преобразований:

$$\psi_m(x) = 2 \int_x^R \varphi_m(r) r (r^2 - x^2)^{-1/2} dr \quad (9.25)$$

таких, что $\varphi_m(r)$ образуют полную систему функций, а $\psi_m(x)$ ортогональны:

$$(\psi_i, \psi_m) = Q_m \delta_{im}. \quad (9.26)$$

Если теперь разложить функцию $\varphi(r)$ в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(r), \quad (9.27)$$

то коэффициенты этого разложения определяются из оценки скалярных произведений

$$a_m = Q_m^{-1} (\psi_m, f). \quad (9.28)$$

Скалярные произведения в (9.26) и (9.28) определяются интегралами

$$(\psi, g) = \int_0^R \psi(x) g(x) q(x) dx, \quad (9.29)$$

где $q(x)$ — некоторые весовые функции.

В методе Герлитца в качестве ортогональной системы $\{\psi_m\}$ выбраны функции Чебышева 2-го рода:

$$U_m(x) \equiv \sin(m \arccos x), \quad (9.30)$$

для которых выполняются условия ортогональности

$$\int_{-1}^1 U_m(x) U_j(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = \pi \delta_{mj} / 2. \quad (9.31)$$

Эти функции связаны преобразованием (9.25) с круговыми полиномами Цернике [21], которые, в свою очередь, имеют вид полиномов Лежандра $P_m(t)$ с аргументом $t \equiv \equiv (2r^2 - 1)$ и ортогональны в единичном круге:

$$2(2m+1) \int_0^1 P_m(t) P_j(t) r dr = \delta_{mj}. \quad (9.32)$$

Попутно отметим, что в работе [366] для аппроксимации использовались непосредственно четные полиномы Лежандра $P_{2i}(r)$. Если прямое и обратное интегральные преобразования Абеля (9.2)–(9.3) записать в форме (полагая $R=1$)

$$f(x) = T^{-1}\varphi(r), \quad \varphi(r) = Tf(x), \quad (9.33)$$

то получим связь между нечетными функциями Чебышева и полиномами Лежандра вида

$$P_m(t) = (2/2m+1)T^{-1}U_{2m+1}(x). \quad (9.34)$$

Коэффициенты a_i искомого разложения (9.27) функции $\varphi(r)$ по полиномам $P_m(t)$ определяются из

$$a_m = [(2m+1)/\pi] \int_{-1}^1 f(x) U_{2m+1}(x) (1-x^2)^{-1/2} dx. \quad (9.35)$$

Полиномы Лежандра удобно определять из рекуррентных формул [101]

$$\begin{aligned} P_{m+1}(t) &= [(2m+1)tP_m(t) - mP_{m-1}(t)]/(m+1) = \\ &= tP_m(t) + [(t^2-1)/(m+1)]dP_m(t)/dt, \quad (9.36) \\ P_0(t) &= 1, \quad P_1(t) = t. \end{aligned}$$

Рассмотренный метод Герлитца послужил основой для более тщательных разработок [123, 129]. В этих работах в отличие от [299] уже рассматривается вопрос об оптимальном выборе числа членов разложения ряда (9.27), причем выбор основывается на статистических критериях.

Задача устойчивого суммирования рядов Фурье (9.27) с приближенно заданными коэффициентами (9.35) являет-

ся в общем случае некорректной. В работе [123] для ее решения вводились регуляризующие множители

$$\varphi(r) \simeq R^{-1} \sum_m \rho_m a_m P_m(t), \quad (9.37)$$

$$t = 2r^2 - 1,$$

и считалось, что

$$\rho_m = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq M, \\ 0, & m > M, \end{cases} \quad (9.38)$$

т. е. попросту ограничивалось число членов ряда. Для определения границы M применялся статистический критерий значимости Фишера [236]. При этом ряд (9.37) обрывается, если условие

$$[2\pi(n+1)/2(2M+1)^2] a_m^2 \geq D_M F_{1, n-M, p} \quad (9.39)$$

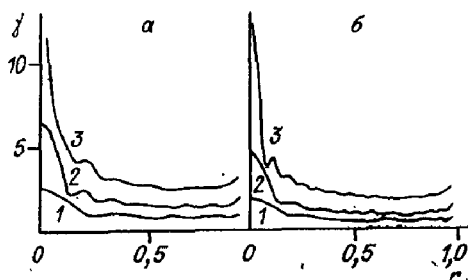
перестает выполняться для двух или более коэффициентов. Здесь

$$D_M = [(n+1)/2(n-M)] \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} [f_M(x) - f(x)]^2 dx = [(n+1)/2(n-M)] \left\{ \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f^2(x) dx - 2\pi \sum_{i=0}^M a_i^2 (2i+1)^{-2} \right\} \quad (9.40)$$

— остаточная дисперсия, а $F_{1, n-M, p}$ — квантиль распределения Фишера с принятым уровнем значимости, например $p = 0,05$.

В этой же работе проводилось детальное статистическое исследование рассматриваемого алгоритма с учетом случайных шумов в функции $f(x)$ и с выбором регуляризующих множителей ρ_i различного вида. На большом числе модельных функций показано, что такой метод дает устойчивые к шумам результаты восстановления, причем наименьшую систематическую ошибку обеспечивают регуляризующие множители вида (9.38). На рис. 26 приведены соответствующие коэффициенты усиления ошибки $\gamma(r)$ при восстановлении локальных коэффициентов эмиссии $\varphi(r)$ алгоритмом (9.37)—(9.39) для двух значений размерности сетки: $n = 20$ и 40 [123]. Из рисунка видно, что ряды (9.37) дают устойчивое решение тем лучшее, чем в

Рис. 26. Коэффициенты усиления ошибки при аппроксимации $f(x)$ нечетными функциями Чебышева 2-го рода для $n = 20$ (а) и $n = 40$ (б) [123].
 $M = 5$ (1), 10 (2), 20 (3).



большем числе точек задана исходная информация и чем меньше членов ряда требуется для аппроксимации функции $f(x)$.

Следует отметить, что в данных методах основная задача алгоритма — сгладить зашумленные измерения $f(x)$ разложением по ограниченному базису. Сглаженные значения сигнала можно использовать затем для получения $\varphi(r)$ более простым путем, например методом Бокастена. Подобный подход развивается в работе [283], где для решения уравнения (9.2) применяется метод конечных сумм с квадратурными формулами средних прямоугольников. Для сглаживания исходных данных предложено использовать четные полиномы Чебышева, к достоинствам которых можно отнести возможность выбрать вес ортогональности равным весу измерений и задавать эти данные на произвольной неравномерной сетке. В плазменных исследованиях часто используются близкие подходы [18, 103, 332], причем в работе [103] выполнено разложение искомого решения в ряд по собственным функциям интегрального оператора, отличающегося, вообще говоря, от исходного (9.2). Однако такое отличие тем не менее не мешает эффективно обрабатывать данные плазменных исследований [33].

В работе [18] модификацией алгоритма (9.37)—(9.39) обработаны результаты исследования плотных лазерных факелов, полученные лазерной интерферометрией. Характерные размеры и времена исследуемых процессов — микроны и пикосекунды. На рис. 27 приведены локальные поля электронной концентрации для сферической и плоской мишеней. Получено хорошее совпадение результатов восстановления N_e различными методиками в процессе обработки интерферограмм из работы [255]. Методикой сравнения здесь было применение для инверсии Абеля «обрезанных» рядов Фурье — Бесселя [361].

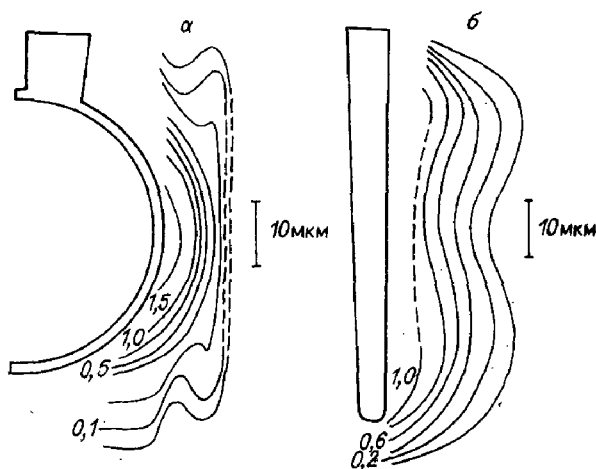
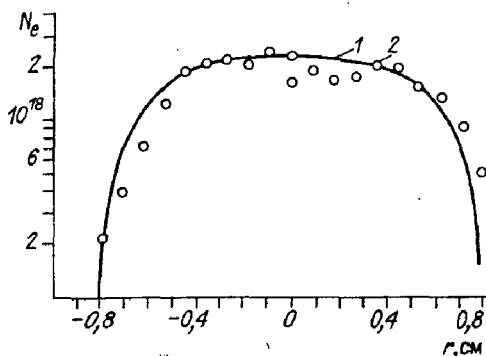


Рис. 27. Изолинии электронных плотностей N_e (в единицах 10^{21} см^{-3}) лазерной плазмы [18].

a — сферическая, *б* — плоская мишень.

Следует упомянуть также статью [369], в которой в отличие от излагаемого подхода проводилась аппроксимация полиномами Лежандра (только четными) не функции $\varphi(r)$, а измеряемого сигнала $f(x)$. Регуляризация задачи фактически сводилась к сглаживанию экспериментальных шумов путем ограничения числа членов ряда в разложении $f(x)$ с использованием статистического критерия Фишера. Полученное разложение далее интегрировалось по (9.3). Эффективность этого алгоритма продемонстрирована в интерферометрических исследованиях плазменного фокуса. На рис. 28 приведено радиальное распределение



электронной плотности плазмы N_e (см^{-3}), полученное двумя методами: по Бокастену [264] и по [369]. Независимо

Рис. 28. Восстановление распределения электронной плотности N_e (см^{-3}) в плазменном фокусе методами [369] (1) и Бокастена [264] (2).

обрабатывались две половины интерференционной полосы ($x \in [-R, R]$). Видно, что регуляризованный алгоритм [369] в отличие от метода Бокастена, хорошо подавляет неустойчивость решения.

§ 2. Двумерные задачи

Использование полиномиальных разложений в двумерных обратных задачах диагностики плазмы будет проиллюстрировано также на примерах определения локальных характеристик по измеренным интегральным. Согласно формуле (9.1), ранее формально решалась также двумерная задача — отыскивалось распределение $\varphi(x, y)$, однако использование жесткой априорной информации (условия осевой симметрии) позволяло свести ее к одномерной. Оказывается, что подобная редукция возможна, если функция $\varphi(x, y)$ представима в виде $\varphi(z)$, где z — некоторый монотонно изменяющийся параметр, характеризующий вид изолиний искомой функции. В данном случае априорная информация — это аналитическое задание формы изолиний, например, в виде эллипсов [163, 168, 342].

Один из подходов к приближенному восстановлению асимметричного распределения локальной эмиссии $\varphi(x, y)$ заключается в применении отрезка ряда Фурье. Переходя в полярную систему координат (r, θ) , запишем [289]:

$$\varphi(r, \theta) = H(r) + K(r) \cos \theta + L(r) \sin \theta, \quad (9.41)$$

где коэффициенты ряда зависят лишь от радиальной координаты.

Введем следующие функции [123, 289, 320]:

$$\begin{aligned} I^+(x) &= (I(x) + I(-x))/2, \\ I^-(x) &= (I(x) - I(-x))/2x, \\ J^+(y) &= (J(y) + J(-y))/2, \\ J^-(y) &= (J(y) - J(-y))/2y. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Здесь $I(x)$ — поперечное распределение интенсивности излучения плазмы, выходящего в направлении оси OY , а $J(y)$ — интенсивность в направлении оси OX , т. е. необходимо проведение измерений уже в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Тогда можно показать, что связь между комбинацией экспериментальных данных (9.42) и искомыми коэффициентами ряда (9.41) осуществляется также с помощью интегральных уравнений Абеля [289]:

$$\begin{aligned}
 I^+(x) &= 2 \int_x^R r (r^2 - x^2)^{-1/2} H(r) dr, \\
 I^-(x) &= 2 \int_x^R (r^2 - x^2)^{-1/2} K(r) dr, \\
 J^+(y) &= 2 \int_y^R r (r^2 - y^2)^{-1/2} H(r) dr, \\
 J^-(y) &= 2 \int_y^R (r^2 - y^2)^{-1/2} L(r) dr.
 \end{aligned}
 \tag{9.43}$$

Очевидно, что аппроксимация функции $\varphi(r, \theta)$ низкими гармониками ряда Фурье возможна лишь при небольших отклонениях от осевой симметрии. В работе [320] данная методика применялась для спектроскопического определения поля температур аргоновой плазмы в ВЧ-поле в условиях небольшого отклонения от осевой симметрии. На рис. 29 приведено поле температур в центральном сечении такого плазменного столба. Погрешность восстановления температуры в работе оценена в 1%, а погрешность локальных коэффициентов эмиссии — в 7%.

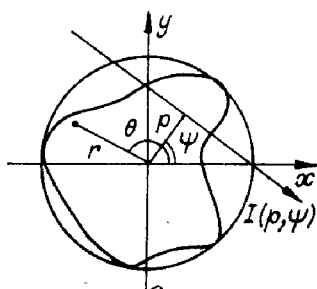
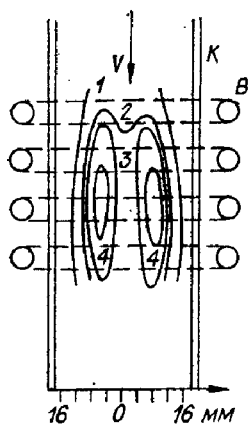


Рис. 30. Геометрическая схема регистрации излучения $I(\rho, \psi)$ асимметричной плазмы.

Рис. 29. Поле изотерм аргоновой плазмы: V — газовый поток, K — кварцевая трубка, B — витки катушки ВЧ-поля.

Температуры: 1 — 8600 К, 2 — 9600, 3 — 9800, 4 — 10 000 К [320].

Естественным развитием рассмотренного упрощенного подхода является использование значительно большего числа членов ряда Фурье типа (9.41). Этой методике посвящена серия независимых работ [64, 273, 337, 369].

Пусть свечение исследуемой плазмы в некотором ее сечении регистрируется детектором вдоль набора параллельных лучей (рис. 30). Опишем объект окружностью некоторого радиуса, который можно положить равным единице. Тогда в пренебрежении самопоглощением, рефракцией и рассеянием задача сводится к решению двумерного интегрального уравнения

$$f(p, \psi) = \int_{L(p, \psi)} \varphi(r, \theta) dl, \quad (9.44)$$

где $dl = \delta(y - p/\sin \psi + x \operatorname{ctg} \psi) dx dy$. Пусть $\varphi(r, \theta)$ — однозначная, конечная и непрерывная функция; тогда ее можно разложить в ряд Фурье

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(r) \exp(ij\theta), \quad (9.45)$$

$$\varphi_j(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) \exp(-ij\theta) d\theta. \quad (9.46)$$

Подставляя эти выражения в (9.44), получим [273]

$$f(p, \psi) = 2 \sum_j \exp(ij\psi) \int_p^1 (r^2 - p^2)^{-1/2} \varphi_n(r) \times \\ \times \cos[j \arccos(p/r)] r dr. \quad (9.47)$$

Поскольку $f(p, \psi)$ есть функция в полярных координатах (p, ψ) в единичном круге, ее также можно разложить в ряд Фурье:

$$f(p, \psi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_i(p) \exp(ij\psi), \quad (9.48)$$

$$\text{где } f_i(p) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(p, \psi) \exp(-ij\psi) d\psi. \quad (9.49)$$

Сравнивая (9.47) и (9.49), находим, что задача решения интегрального уравнения (9.44) свелась к решению систе-

мы одномерных интегральных уравнений типа Абеля:

$$f_i(p) = 2 \int_p^1 (r^2 - p^2)^{-1/2} \varphi_j(r) \cos [j \arccos (p/r)] r dr. \quad (9.50)$$

Поскольку $Q_j(x) = \cos [j \arccos x]$ — полиномы Чебышева (четные) 1-го рода, окончательно система (9.50) запишется в виде

$$f_i(p) = 2 \int_p^1 (r^2 - p^2)^{-1/2} \varphi_j(r) Q_j(p/r) r dr. \quad (9.51)$$

В работе [64] приведены аналитические формулы обращения интегральных уравнений (9.51) для малых гармоник ($j = 0, 1, 2$). Однако имеется общая формула обращения [273]:

$$\varphi_j(r) = -\pi^{-1} d \left[\int_r^1 p^{-1} (p^2 - r^2)^{-1/2} r f_j(p) Q_j(p/r) dp \right] / dr. \quad (9.52)$$

(В этом выражении полиномы $Q_j(x)$ уже рассматриваются для области $x \geq 1$.) Очевидно, что для нулевой гармоники ($j = 0$) автоматически получается формула обычной инверсии Абеля (9.3).

В последующих работах Кормака формулы (9.51), (9.52) обобщены на случай неограниченной плоскости [274], а двумерная задача (9.44) — на случай трехмерного интегрального уравнения, когда объект исследуется в широком телесном угле [275].

Следует отметить, что алгоритм (9.45) — (9.51) свел исходную двумерную задачу к серии одномерных, но все еще интегральных уравнений 1-го рода. В работе [274] Кормак довел проблему до системы линейных алгебраических уравнений введением разложений по ортогональным полиномам

$$f_j(p) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_j^k \sin [(j+2k+1) \arccos p], \quad (9.53)$$

$$\varphi_j(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_j^k (j+2k+1) R_j^k(r), \quad (9.54)$$

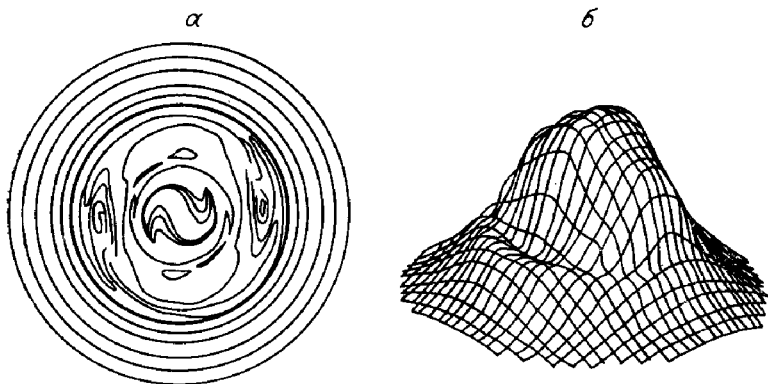


Рис. 31. Результаты восстановления локальной интенсивности рентгеновского излучения плазмы токамака РЛТ в одном из режимов ($m = 2$), представленные в виде изолиний (а) и в трехмерном изображении (б) [353].

$$\text{где } R_j^k(r) = \sum_{m=0}^k (-1)^m (j + 2k - m)! r^{j+2k-2m} [m!(j+k - m)!(k-m)!]^{-1} \quad (9.55)$$

— полиномы Цернике [21]. Эффективность использования этих выражений проверялась как в тщательном абсорбционном эксперименте по рентгеновскому просвечиванию физической модели [275], так и при математическом моделировании [352].

В реальном плазменном эксперименте методы Кормака использовались недавно для восстановления магнитогидродинамических «тиринговых» мод в токамаке РЛТ [353]. Определялись низшие моды в (9.45) $j = 0, 1, 2, 3$, соответствующие относительно медленным компонентам периодической эволюции объекта. На рис. 31 приведен результат восстановления локального поля рентгеновского излучения плазмы с полоидальным модовым числом волны $m = 2$.

Интересно, что в работе Кормака [275], кроме того, изложены основы другого метода, независимо открытого и развитого Мальдонадо и неоднократно уже применявшегося в газодинамических и плазменных исследованиях [324—326, 328, 337, 338, 354, 365]. Изложим кратко этот подход в модификации Мальдонадо [337]. Ортогональное разложение для $\varphi(r, \theta)$ записывается в виде

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma_m(r) \cos m\theta + \beta_m(r) \sin m\theta) w_m, \quad (9.56)$$

где
$$\gamma_m(r) = Q_m(r) \sum_{k=0}^{\infty} C_m^k(r) B_k^m(\alpha),$$

$$\beta_m(r) = Q_m(r) \sum_{k=0}^{\infty} C_m^k(r) D_k^m(\alpha), \quad (9.57)$$

$$Q_m(r) = (\alpha r)^m \exp(-\alpha^2 r^2) (\alpha/\pi)^2,$$

$$C_m^k(r) = (-1)^k k! [(m+2k)!]^{-1} L_k^m(\alpha^2 r^2).$$

Здесь $w_0 = 0,5$, $w_m = 1$ ($m \neq 0$), $L_k^m(\alpha^2 r^2)$ — обобщенные полиномы Лагерра, α — числовой параметр, влияющий на сходимость рядов, а коэффициенты ряда $B_k^m(\alpha)$ и $D_k^m(\alpha)$ содержат основную экспериментальную информацию

$$B_k^m(\alpha) = \int_0^{\pi} \cos m\psi d\psi \int_{-\infty}^{\infty} [f(p, \psi) H_{m+2k}(\alpha p) + f(p, \pi - \psi) \times \\ \times H_{m+2k}(-\alpha p)] dp, \quad (9.58)$$

$$D_k^m(\alpha) = \int_0^{\pi} \sin m\psi d\psi \int_{-\infty}^{\infty} [f(p, \psi) H_{m+2k}(\alpha p) - f(p, \pi - \\ - \psi) H_{m+2k}(-\alpha p)] dp,$$

$H_{m+2k}(\alpha p)$ — полиномы Эрмита.

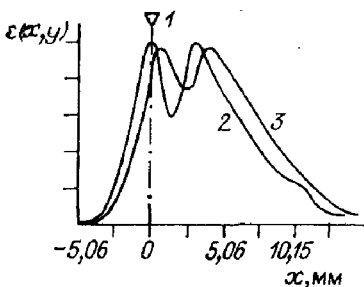
Опубликованные в литературе приложения данного метода обычно относятся к объектам с плоскостью симметрии относительно $\psi = 0$. В этом случае формулы (9.56) — (9.58) существенно упрощаются:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m(r) \cos m\theta \\ \beta_m(r) = 0, \quad (9.59)$$

$$B_k^m(\alpha) = 2 \int_0^{\pi} \cos m\psi d\psi \int_{-\infty}^{\infty} f(p, \psi) H_{m+2k}(\alpha p) dp.$$

Впервые этот алгоритм в плазменной диагностике использован в работе [326], где восстанавливались коэффициенты эмиссии спектральных линий аргона в свободно горящей аргоновой дуге атмосферного давления, возму-

Рис. 32. Распределение коэффициентов эмиссии аргонной плазмы $\varepsilon(x, y)$ (в отн. ед.) в плоскости $y = 0$ для двух значений расстояния от катода (1). $z = 3,18$ мм (2) и 3,8 мм (3) [326].



щенной внешним магнитным полем (ток 400 А, поле $36 \cdot 10^{-4}$ Т). Излучение плазмы измерялось в семи направлениях с равномерным разбиением диапазона углов ψ от 0 до 90° . Суммирование рядов (9.59) и (9.57) проводилось до конечных пределов, и на основе предварительного математического эксперимента они выбирались соответственно равными $M = 10$ и $K = 20$.

На рис. 32 приведены результаты восстановления с помощью описанной методики локальных распределений излучения линии $\text{AgI } \lambda = 696,5$ нм в двух плоскостях, находящихся на различном расстоянии от катода [326]. Более детальные исследования этой дуги с получением изолиний ее локальных температур выполнены в работе [337]. Рассматриваемый алгоритм успешно применялся и для исследования азотной дуги в магнитном поле, обдуваемой поперечным газовым потоком [354], со следующими параметрами: ток 24 А, скорость обдува $V = 0,6$ м/с, индукция магнитного поля $B = 15 \cdot 10^{-4}$ Т. $\lambda = 868$ нм, $\Delta\psi = 15^\circ$. На рис. 33 приведены изотермы такой дуги в одном из ее поперечных сечений.

К недостаткам метода Мальдонадо следует отнести в первую очередь необходимость суммирования большого числа

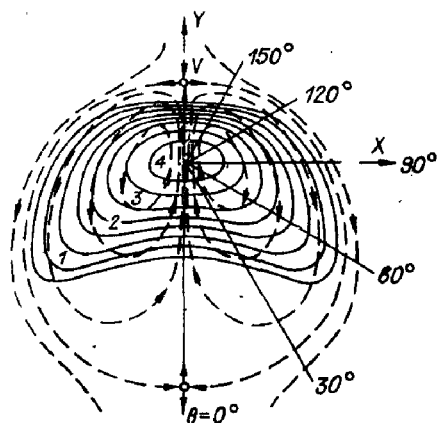


Рис. 33. Поле изотерм (сплошные линии) и массопереноса (штриховые) азотной дуги в скрещенных магнитном поле и газовом потоке.

1 — 6400 К, 2 — 6600, 3 — 6800, 4 — 7000 К [354].

членов рядов (9.56) — (9.57) в случае сильно асимметричных распределений. Например, при восстановлении модельного профиля ударных волн в работе [328] использовалось около 2000 членов. Задача суммирования обобщенных рядов Фурье с неточно заданными коэффициентами является некорректной [217], естественно, так же как и исходная задача решения интегрального уравнения 1-го рода (9.43). Поэтому использование произвольного обрезания суммирования, несогласованного с уровнем погрешности эксперимента, может привести к резкому усилению ошибки в восстановленной функции. В работе [167] предложена регуляризованная версия метода Мальдонадо, позволяющая находить граничные значения для K и M на основе критерия невязки [217]. Удобно, что в этой модификации для поиска K и M нет необходимости многократно определять решения задачи $\varphi_{MK}(r, \theta)$. Достаточно найти решение уравнения

$$\|\Delta(p, \psi)\|_2^2 = s^2, \quad (9.60)$$

где s — норма ошибки измерения функции $f(p, \psi)$, а $\Delta(p, \psi)$ — функция невязки, для нахождения которой в [167] разработан и опробован в модельных расчетах эффективный алгоритм.

§ 3. Вопросы сплайновой аппроксимации

Отдельного рассмотрения заслуживает использование при решении обратных задач особых степенных полиномов-сплайнов. Применение таких полиномов весьма эффективно, в частности, при решении тех интегральных уравнений, для которых известны аналитические обращения, как это имеет место для преобразования Абеля (9.2) или Радона (9.43). Тогда известная функция, для определенности, например, интенсивность излучения плазмы $f(x)$, аппроксимируется сплайном и полученное выражение подставляется в формулу обращения, скажем, уравнения Абеля (9.3).

Сплайном обычно называется определенная в области D кусочно-полиномиальная функция, для которой существует разбиение D на подобласти такое, что внутри каждого интервала функция представляет собой многочлен некоторой степени k [133]. Кроме того, эта функция не-

прерывна в области D вместе со всеми своими производными до $(k - 1)$ -го порядка и имеет интегрируемую с квадратом производную порядка k . Наиболее употребительны в приложениях кубические полиномы, т. е. $k = 3$. Поскольку экспериментальные измерения $f(x)$, которые нам надо аппроксимировать, содержат ошибки измерений, следует использовать сглаживающие сплайны, т. е. функцию, проходящую не по заданным значениям $f(x)$, а более плавно.

Рассмотрим применение статистической регуляризации в построении кубических сплайнов при решении интегрального уравнения Абеля [46]. На каждом из отрезков разбиения оси абсцисс $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, будем приближать экспериментальную кривую $f(x)$ кубическим полиномом $S_\alpha(x)$:

$$S_\alpha(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \quad (9.61)$$

Эта функция обладает следующими свойствами: а) она минимизирует функционал

$$\Phi_\alpha[S(x)] = \alpha \int_0^R (S''(x))^2 dx + \sum_{i=1}^n (f_i - S(x_i))^2/p_i, \quad (9.62)$$

где p_i ($p_i > 0$) — веса измерений, например их дисперсии, $f_i = f(x_i)$; б) функция $S_\alpha(x)$ и ее первые две производные $S'_\alpha(x)$, $S''_\alpha(x)$ всюду непрерывны на $[0, R]$, т. е. $S_\alpha(x) \in \in C^2_{[0, R]}$; в) $S'_\alpha(0) = f'(0)$, $S'_\alpha(R) = f'(R)$ — краевые условия для сплайна.

В работе [46] показано, что при заданном параметре сглаживания α решение уравнения Абеля (9.2) запишется в виде

$$\varphi(r) = -\pi^{-1} \left[U(r, r, x_m) + \sum_{i=m}^{n-1} U(r, x_i, x_{i+1}) \right],$$

$$U(r, x_i, x_{i+1}) = (2c_i - 6d_i x_i)(D_{i+1} - D_i) + (b_i - 2c_i x_i + 3d_i x_i^2 + 1,5d_i r^2) \ln [(x_{i+1} + D_{i+1})/(x_i + D_i)] + 1,5d_i (x_{i+1} D_{i+1} - x_i D_i). \quad (9.63)$$

Здесь $D_i = (x_i^2 - r^2)^{1/2}$, m определяется из условия $x_{m-1} \leq r < x_m$, а коэффициенты сплайна a_i , b_i , c_i и d_i находятся стандартным образом [133].

Основную трудность при построении сглаживающего сплайна представляет выбор параметра сглаживания α , который ранее считался заданным. Алгоритм оценивания оптимального значения параметра α , минимизирующего среднеквадратическую ошибку сглаживания, строится следующим образом. Пусть η — n -мерный вектор погрешности измерений с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной матрицей $V_\eta = \langle \eta \cdot \eta^* \rangle$. В частном случае некоррелированных помех это будет диагональная матрица, содержащая лишь дисперсии измерений s_i^2 . Запишем выражение для невязки $e(\alpha) = f - S_\alpha(x)$. Достаточным условием оптимальности α является тождество [44]

$$V_e(\alpha) = \alpha V_\eta H^* (\alpha H P H^* + A)^{-1} H P, \quad (9.64)$$

где P — диагональная матрица весов p_i , трехдиагональные положительно определенные матрицы H и A содержат в некоторых комбинациях шаги сетки Δx_i (см. [44]), а $V_e(\alpha) = \langle e(\alpha) \cdot e^*(\alpha) \rangle$ — матрица вторых моментов вектора $e(\alpha)$. Параметр α , не противоречащий в статистическом смысле условию (9.59), находится в итерационном процессе по $\gamma = \alpha^{-1}$:

$$\begin{aligned} \gamma_{l+1} &= \gamma_l - (R(\gamma_l) - n)/R'(\gamma_l), \\ \gamma_0 &> 0, \quad l = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (9.65)$$

$$R(\gamma) = f^* V_\eta^{-1} P H^* (H P H^* + \gamma A)^{-1} H f. \quad (9.66)$$

В качестве искомого α_0 принимается такое значение γ_l^{-1} , при котором $R(\gamma_l) \in [\vartheta_n(\beta/2), \vartheta_n(1 - \beta/2)]$, где $\vartheta_n(\beta/2)$ — это $\beta/2$ квантиль χ^2 -распределения с n степенями свободы; β — величина ошибки 1-го рода при проверке гипотезы (9.64).

Алгоритм апробировался в серии модельных расчетов [45], а также применялся при исследовании плазмы, созданной электронным пучком в разреженном газе [113]. Сглаживание сплайнами функции $f(x)$ для решения уравнения Абеля рассматривалось независимо в других работах [293, 358, 376]. Однако в них параметр сглаживания либо полагался равным единице, либо процесс сглаживания проводился на ЭВМ в диалоговом режиме с субъективной подстройкой оператором весов измерений p_i в зависимости от того, насколько «хорошо» изображения на дисп-

лее функций $f(x_i)$ и $S(x_i)$ согласуются друг с другом [293]. В работе [159] сплайны применялись не для сглаживания $f(x)$, а для аппроксимации функции $\varphi(r)$. Это повышает точность квадратурного приближения, однако метод опробован лишь в модельных расчетах.

Двумерная задача обращения интегрального уравнения Радона (9.43) в принципе также может быть решена с применением сглаживающих сплайнов. При некоторых ограничениях на искомое решение и измеренную функцию $f(p, \psi)$ [52, 89, 345] обращение преобразования Радона можно записать в виде

$$\varphi(r, \theta) = - (4\pi^2)^{-1} \int_0^{2\pi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (p - p_0)^{-2} f(p, \xi) dp, \quad (9.67)$$

$$p_0 = r \sin(\theta - \xi).$$

(В этих обозначениях $\xi = \psi - \pi/2$, см. рис. 30.) Проводя интегрирование по частям, можно получить другие модификации этого выражения [89, 247, 362]

$$\varphi(r, \theta) = - (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\pi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (p - p_0)^{-1} [\partial f(p, \xi) / \partial p] dp, \quad (9.68)$$

$$\varphi(r, \theta) = - (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\pi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} [\partial^2 f(p, \xi) / \partial p^2] \ln |p - p_0| dp. \quad (9.69)$$

Здесь внутренние интегралы понимаются в смысле главного значения. Для них удобны следующие представления [309, 364]:

$$\varphi(r, \theta) = - (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\pi} d\xi \int_0^{\infty} dp \cdot p^{-2} [f(p_0 + p, \xi) + f(p_0 - p, \xi) - 2f(p_0, \xi)], \quad (9.70)$$

$$\varphi(r, \theta) = - (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\pi} d\xi \int_0^{\infty} dp \cdot p^{-1} [\partial f(p_0 + p, \xi) / \partial p - \partial f(p_0 - p, \xi) / \partial p]. \quad (9.71)$$

В численной реализации выражений (9.70), (9.71) необходимо обходить особенность в нуле.

Как видно из представлений решения задачи (9.68)—(9.71), вновь встает проблема численного дифференцирования экспериментально измеренной функции, в данном случае—функции двух переменных. Это можно сделать с помощью сглаживающих двумерных сплайнов. Однако эффективные алгоритмы такого рода отсутствуют, и даже процедуры интерполирования бикубическими сплайнами много сложнее одномерных кубических [133]. Поэтому в целях упрощения задачи можно последовательно применить одномерные сплайны для сглаживания отдельных распределений $f(p, \xi_i)$ при фиксированных значениях углов ξ_i . Такая методика опробована в работах [137, 139], где сплайны строились с использованием параметра сглаживания α , который выбирался не по методу [46], а по критерию невязки [217].

С целью уменьшения времени счета на ЭВМ выражения (9.70) — (9.71) удобно преобразовать к следующему виду [79]:

$$\varphi(r, \theta) = - (2\pi^2)^{-1} \int_0^{\pi} d\xi J(p_0(\xi), \xi), \quad (9.72)$$

$$J(p_0, \xi) = \int_0^{\infty} dp \cdot p^{-2} [f(p_0 + p, \xi) + f(p_0 - p, \xi) - 2f(p_0, \xi)], \quad (9.73)$$

$$J(p_0, \xi) = \int_0^{\infty} dp \cdot p^{-1} [\partial f(p_0 + p, \xi) / \partial p - \partial f(p_0 - p, \xi) / \partial p]. \quad (9.74)$$

Если насчитать массив значений функции $J(p_0, \xi)$ на достаточно густой сетке значений переменной p_0 при различных ξ , то далее можно получить значение искомой функции (9.72) в заданной точке (r, θ) либо (x, y) , используя интерполяцию на нужные значения J :

$$p_0(r, \theta) \doteq r \sin(\theta - \xi) \quad (9.75)$$

или

$$p_0(x, y) = y \cdot \cos \xi - x \sin \xi. \quad (9.76)$$

На рис. 34 приведены результаты восстановления рассмотренным способом осесимметричной и асимметричной

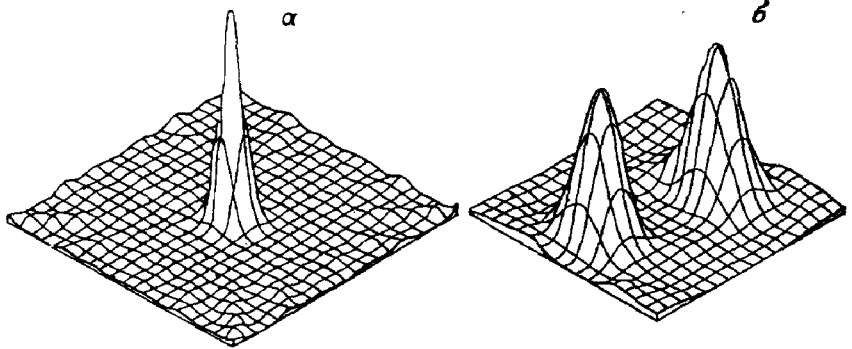


Рис. 34. Задача плазменной томографии. Восстановление модельных функций (9.77), (9.78) обратным преобразованием Радона (9.72), (9.73) путем использования сглаживающих сплайнов.
 а) $M = 6, n = 21$; б) $M = 12, n = 47$.

модельных функций вида

$$\varphi(r, \theta) = \exp(-a^2 r^2) \quad (9.77)$$

и

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^2 \exp[-b^2(x - x_i)^2 - c^2(y - y_i)^2],$$

$$x, y \in [-1, 1], \quad (9.78)$$

где $a = 12,5$; в функцию $f(p, \xi)$ вводилась нормальная случайная ошибка в 1% (рис. 34, а). Для модели (9.78) параметры выбирались равными: $b = 2,7$; $c = 3,7$; $x_1 = -0,2$; $y_1 = -0,5$; $x_2 = 0,2$; $y_2 = 0,5$; ошибка «измерений» 5% (рис. 34, б). Восстановление осесимметричной модели с резкими градиентами характеризует возможные искажения — артефакты, вносимые в решение самим алгоритмом реконструкции. Приведенные результаты получены при весьма малом числе направлений наблюдения: 6 проекций с шагом $\Delta\xi = 30^\circ$.

Такое число направлений диктовалось необходимостью исследования метода в условиях его применения к частной экспериментальной задаче [136]. Увеличение числа направлений в численном моделировании до 12—18 существенно улучшает угловое разрешение метода. Результаты обработки с помощью данного алгоритма спектральных измерений, выполненных в винтовой аргоновой дуге, помещенной в продольное магнитное поле, приведены в следующей главе.

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В ходе всего предшествующего изложения приводилось немало примеров с целью продемонстрировать эффективность тех или иных алгоритмов применительно к различным задачам диагностики плазмы, однако, по-видимому, нелишне в заключение дать небольшую подборку дополнительных иллюстраций. Для большего разнообразия будут рассмотрены одно-, дву- и трехмерные задачи, в том числе нелинейные. Чтобы примеры по своему физическому содержанию не создавали впечатления чересчур пестрой картины, решено было затронуть лишь два круга проблем: во-первых, восстановление основных функций распределения (далее сокращенно ФР) для компонентов плазмы (одномерные задачи); во-вторых, пока еще немногочисленные, но очень перспективные эксперименты по плазменной томографии (многомерные задачи). Значительная часть примеров взята из оригинальных работ авторов.

§ 1. Восстановление ФР электронов по энергиям с помощью зондовой характеристики

Метод электростатических зондов, разработанный Ленгмюром еще в 1924 г., широко применяется и по настоящее время для измерения важнейших характеристик ионизованных сред, таких как низкотемпературная плазма разнообразных типов газового разряда и послесвечения, области ионизации за ударными волнами, пламена, МГД-течения и плазменные струи, а также атмосферная и космическая плазма. Всевозрастающие требования к точности и достоверности локальных зондовых измерений стимулируют развитие новых теоретических исследований, позволяющих постепенно продвигать зондовую методику от неподвижной плазмы к движущейся, от разреженной к плотной, от «спокойной» к турбулентной, а также учитывать наличие магнитного поля, химических реакций и т. п. [240].

На фоне огромной массы работ по зондовым измерениям количество попыток (притом не всегда удачных) не предполагать наличия равновесной (максвелловой) ФР электронов или ионов по энергиям, а определять эту ФР по зондовой характеристике невелико. Например, в весьма обстоятельной уже цитированной монографии [240] такого рода исследования вообще обойдены молчанием.

Легко убедиться, что основная трудность решения указанной задачи связана с ее неустойчивостью. В самом деле, в неравновесной слабо анизотропной плазме обычно удастся выделить из полной ФР для электронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ (\mathbf{r} — координата, \mathbf{v} — скорость частицы) составляющую

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi \left[\frac{mv^2}{2} + eV(r) \right], \quad (10.1)$$

зависящую только от суммы кинетической и потенциальной энергий ε . Если характерное время, определяемое отношением дебаевского радиуса к тепловой скорости иона, значительно меньше времени пребывания зонда в плазме, то для плотности электронного тока на зонд можно записать [240]:

$$j = 2\pi e N_e \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} v^3 [1 - \eta(v, \theta)] \varphi(\varepsilon) dv, \quad (10.2)$$

где e , m , N_e — заряд, масса и плотность электронов соответственно; V — потенциал плазмы относительно зонда; $\eta(v, \theta)$ — коэффициент упругого отражения электронов от зонда; θ — угол между вектором скорости электрона и внутренней нормалью к поверхности выпуклого зонда. Обычно $\eta \ll 1$, и тогда

$$j = 2\pi e N_e m^{-2} \int_{eV}^{\infty} (\varepsilon - eV) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (10.3)$$

Дважды дифференцируя (10.3) по V , приходим к известной формуле Дривестейна:

$$d^2 j / dV^2 = 2\pi e^3 N_e \varphi(eV) / m^2. \quad (10.4)$$

В равновесном пределе $\varphi \rightarrow \varphi_M$, где

$$\varphi_M = (m/2\pi k T_e)^{3/2} \exp(-e/k T_e), \quad (10.5)$$

получаем из (10.3) формулу Ленгмюра:

$$j = (eN_e \langle v \rangle / 4) \exp(-eV/kT_e), \quad (10.6)$$

$$\langle v \rangle = (8kT_e/\pi m)^{1/2},$$

позволяющую элементарным образом находить по зондовой характеристике плотность N_e и температуру T_e электронов плазмы.

В некоторых случаях (см., например, [252]) выгодно накладывать на зонд отрицательный модулированный потенциал $U = V + \Delta V(t)$, фиксируя в зависимости от V плотность тока $j_{2\omega}$ на второй гармонике либо некоторые комбинации гармоник (при многочастотной модуляции). При этом из (10.3) получается следующая формула:

$$j_{2\omega}(V) = \int_0^{\infty} A(eV, \varepsilon) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (10.7)$$

где ядро имеет вид

$$A(eV, \varepsilon) = (4eN_e/m^2) \int_0^{\pi} \cos(2\omega t) d(\omega t) \int_{eU}^{\infty} (\varepsilon' - eU) \delta(\varepsilon - \varepsilon') d\varepsilon'. \quad (10.8)$$

Если $\Delta V(t) = a \cos \omega t$, то

$$A(eV, \varepsilon) = (4eaN_e/3m^2) [1 - (V' - \bar{V})^2/a^2]^{3/2}, \quad V' = \varepsilon/\varepsilon, \quad (10.9)$$

причем в отличие, например, от большинства задач спектроскопии «аппаратная функция» оказывается финитной, т. е. за пределами интервала $V' + a \leq V \leq V' - a$ $A(eV, \varepsilon) = 0$, а значение функции в максимуме определяется амплитудой модуляции. Если последняя выступает в роли малого параметра задачи, то в результате разложения (10.7) в ряд находим.

$$j_{2\omega}(V) \simeq \text{const} \cdot a^2 \varphi(eV). \quad (10.10)$$

Итак, в любой из постановок, сводящихся к решению интегральных уравнений Вольтерра (10.3) или Фредгольма (10.7) 1-го рода либо к двойному дифференцированию функции $j(V)$ (10.4), содержащей шумовой компонент, мы приходим к некорректной задаче, требующей регуляризации.

Математическое моделирование задачи производилось в работе [170]. Алгебраизация интегральных уравнений (10.3) и (10.7) осуществлялась с помощью формулы Симпсона, причем верхний бесконечный предел заменялся конечным (eV_m) с таким условием, чтобы остаток интеграла был всегда меньше ошибок измерений зондового тока. Распределение последних считалось подчиненным нормальному закону и вводилось двояким способом: как случайный шум с постоянной дисперсией либо как шум с постоянным коэффициентом вариации.

Использовались регуляризующие схемы Тихонова с выбором параметра α по невязке (6.8), Мартине — Крынева (6.42) и статистическая с поиском байесовского решения (7.45) и с выбором α в «слоистом ансамбле» (7.53). Существенной частью алгоритмов было применение аппроксимирующей функции (6.40), в качестве которой выбиралась максвеллова ФР (10.5), причем «температура», фигурирующая в формуле (10.5), оценивалась из зондовой характеристики методом наименьших квадратов.

Приведем некоторые результаты модельных расчетов (рис. 35). В этих случаях решалось уравнение (10.3) без введения аппроксимирующей функции. Во всех случаях коэффициент вариации правой части равнялся 5%. Таким образом, эффект от введения аппроксимирующей функции вполне очевиден. Заметим, что если в этой функции искусственно варьировать «температуру», внося тем самым систематические искажения, то изменения T даже в пределах 40—50% по сравнению с оптимальным значением обеспечивают все же лучшее восстановление ФР, нежели в схемах без аппроксимирующей функции.

Исследовались, кроме того, недоопределенные модельные задачи, в которых область восстановления $\Delta\epsilon_1$ превышала энергетический интервал измерений зондового тока $\Delta\epsilon_2 = eV_m$. В этих случаях реализация алгоритмов опирается на понятие нормального решения. Численными расчетами показана возможность уверенного определения ФР при отношениях $\Delta\epsilon_1/\Delta\epsilon_2 \simeq 1,5 \div 2$.

На рис. 36 приведены результаты решения уравнения Фредгольма (10.7) с наложенным потенциалом, который модулирован по закону косинуса. Наблюдается ухудшение точности восстановления хвостовой (высокоэнергетической) части ФР с ростом ошибки измерений $j_{2\omega}(V)$. Изучалась также зависимость относительной погрешности

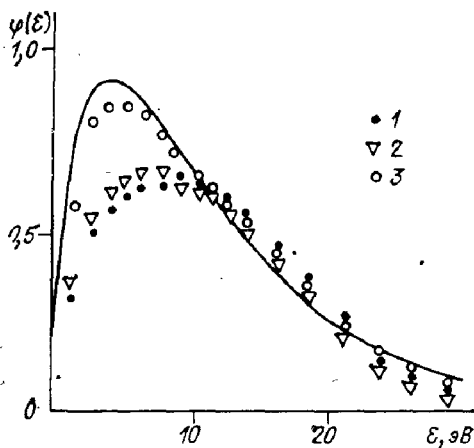


Рис. 35. Сравнение исходной ФР (сплошная линия) с результатами восстановления методом Тихонова (1), статистической регуляризации (2) и применением аппроксимирующей функции (3).

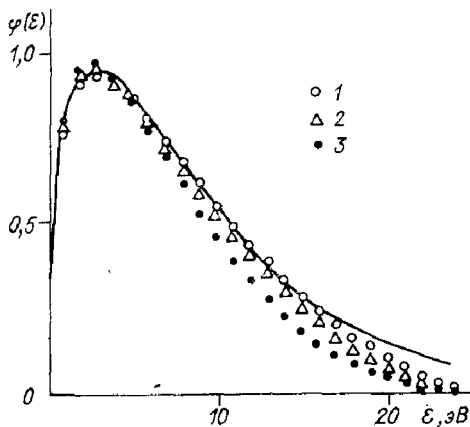


Рис. 36. Влияние погрешности измерений на качество восстановления ФР по формуле (10.7).

Коэффициент вариации для $j_{2\omega}(V)$: 1 — 1%; 2 — 3%; 3 — 5%.

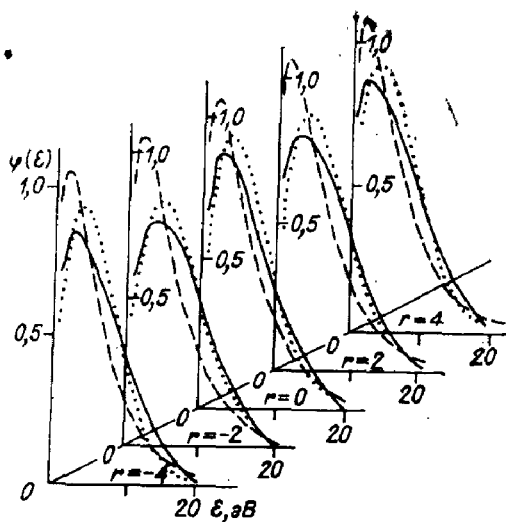
восстановления ФР, близкой к равновесной, от отношения ea/kT (a — амплитуда модуляции). Ошибки характеризовались коэффициентом вариации, равным 3%. Как показывают расчеты, использование условия $a \ll kT/e$ ведет к заметному повышению погрешности восстановления. Между тем экспериментаторы (см., например, [252]) в погоне за простотой оценки ФР типа (10.10) часто стремятся выбрать именно малые значения a .

Укажем теперь на некоторые работы, в которых методы регуляризации использовались для непосредственной обработки экспериментальных зондовых характеристик с целью восстановления ФР. Не останавливаясь на довольно несовершенных приемах, основанных на полиномиальных представлениях зондовой характеристики с последующим двойным дифференцированием (см. статьи Е. К. Ерощенкова и др., цитированные в [132]), отметим

прежде всего работы [263] и [375]. В работе [263] исследовалось послесвечение гелия при давлении 80 Па и силе тока 0,1А. Применялся модулированный потенциал, а для решения уравнения (10.7) привлекался метод Ти-

Рис. 37. Результаты обработки зондовых характеристик для пяти положений зонда относительно диаметра лазерной трубки; расстояния в миллиметрах отсчитываются от оси трубки.

Сплошная линия — восстановленная ФР; штриховая — аппроксимирующая функция; пунктирная — распределение Дрюестейна.



хонова в его стандартной форме. Объектом диагностики в [375] служил положительный столб газового разряда в гелии, а также в смеси гелия и цезия; давление и сила тока в разряде были примерно такими же, как в [263]. Регуляризация тоже осуществлялась методом Тихонова, но уже в применении к уравнению Вольтерра (10.3). Параллельно ФР находилась спектральным методом, описанным далее; оба результата восстановления, по утверждению авторов, различались не более чем на 20%, правда, сравнение производилось по наклону соответствующих кривых, изображенных в логарифмическом масштабе.

Прокомментируем несколько подробнее работу [94], в которой использовались различные регуляризирующие алгоритмы и описанные результаты моделирования [170]. В данном случае импульсный зондовый метод служил для локальных измерений ФР в плазме Ag^+ -лазера. На рис. 37 приведены типичные результаты обработки зондовых характеристик (с поправкой на ионную составляющую плотности тока) для пяти положений импульсного микрозонда, который смещался вдоль диаметра трубки лазера, работавшего при давлении 56 Па и плотности тока 102 А/см^2 . Сплошной линией показана восстановленная ФР с привлечением аппроксимирующей функции по описанной схеме. Сама эта аппроксимирующая функция (т. е. распределение Максвелла с «температурой» T_e , найденной методом наименьших квадратов) нанесена

штриховой линией, а пунктиром изображено распределение Дрювестейна

$$\varphi_D(\varepsilon) = C_D \exp [0,55(\varepsilon/\langle\varepsilon\rangle)^2], \quad (10.11)$$

где C_D — константа нормировки, а $\langle\varepsilon\rangle$ — средняя энергия, вычисленная по восстановленной ФР:

$$\langle\varepsilon\rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon; \quad (10.12)$$

кроме того, по формулам

$$N_e = 4j(0)/e \langle v \rangle, \quad \langle v \rangle = \int_0^{\infty} (2\varepsilon/m)^{1/2} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (10.13)$$

где $j(0)$ — плотность тока на зонд при условии равенства потенциалов зонда и плазмы в окрестности данной точки, находилась электронная плотность N_e . На радиальных зависимостях $N_e(r)$ и $\langle\varepsilon(r)\rangle$ обнаружили отчетливо выраженные минимумы, которые в работе [94] интерпретировать не удалось, поскольку для этой цели были непригодны классические «предельные» модели Шоттки и Ленгмюре — Тонкса. Достигнутый в последнее время благодаря теоретическим исследованиям Валентини [371, 372] значительный прогресс в построении более общей кинетической теории сильноточного разряда позволяет провести такую интерпретацию и понять происхождение указанных минимумов. Мы не будем, однако, углубляться в эти специальные вопросы.

Что касается происхождения набора немаксвелловых ФР, приводимых на рис. 37, то здесь, как показано в [94], можно дать, по крайней мере, качественное объяснение на основе укороченного кинетического уравнения Больцмана

$$\mathbf{v}(\partial\varphi/\partial\mathbf{r}) + (e\mathbf{E}/m)(\partial\varphi/\partial\mathbf{v}) = -S_{11} - S_{1a}, \quad (10.14)$$

исследованного В. Л. Гинзбургом и А. В. Гуревичем [55]. В (10.14) \mathbf{E} — электрическое поле, а в интеграле столкновений оставлены лишь электрон-электронные и электрон-атомные члены (в предположении упругих процессов). Решение можно представить в форме

$$\varphi(\varepsilon) = C \exp \left\{ - (m/kT_0) \int_0^{\infty} v [1 + 2\gamma B(v/\langle v \rangle)] \times \right.$$

$$\times [T_a/T_0 + Z + 2\gamma B(v/\langle v \rangle)]^{-1} dv \}, \quad (10.15)$$

где

$$B(x) = \int_0^x \exp(-y^2) dy - 2\pi^{-1/2} x \exp(-x^2),$$

$$Z = 2(eE)^2/3m\xi kT_0 v_{ea}^2, \quad \gamma = v_{ee}/\xi v_{ea},$$

T_0 — нулевое приближение для «температуры» электронов; v_{ee} и v_{ea} — частоты столкновений электрон—электрон и электрон—атом; ξ — доля энергии, теряемой электроном при упругом столкновении; T_a — температура атомов.

Одновременное выполнение неравенств

$$\gamma \gg 1, \quad \gamma \gg T_a/T_0, \quad \gamma \gg Z, \quad (10.16)$$

что соответствует сравнительно небольшим электрическим полям и значительной ионизации плазмы, обращает (10.15) в максвеллову функцию. В противоположном случае

$$\gamma \ll 1, \quad \gamma \ll T_a/T_0, \quad \gamma \ll Z, \quad (10.17)$$

и при условии, что сечение упругого взаимодействия электрон—атом слабо зависит от энергии, приходим к ФР Дрювестейна (10.11).

Поскольку в результате решения обратной задачи $\langle \epsilon(r) \rangle$ и $N_e(r)$ известны, не представляет труда оценить значения характеристического параметра γ для различных точек внутри лазерной трубки. Для центра трубки получается $\gamma \simeq 140$; для двух крайних точек $\gamma \simeq 40$. Таким образом, согласно (10.16), в центре плазмы электроны максвеллизированы в большей степени, нежели вблизи стенок. Вместе с тем нет оснований ожидать, что в центральной части трубки ФР будет почти максвелловой, а в периферийных частях — почти Дрювестейновской, поскольку все неравенства (10.16) или (10.17) одновременно не выполняются. Все сказанное вполне подтверждается результатами восстановления ФР электронов по энергиям для различных режимов разряда в трубке аргонового лазера, в частности теми, которые приведены на рис. 37.

§ 2. Восстановление ФР электронов по энергиям из сплошного спектра

Эффективным способом определения ФР электронов плазмы по энергиям, а также основных моментных характеристик (N_e и T_e), когда плазма близка к локальному термодинамическому равновесию (ЛТР), может служить интенсивность излучения в континууме. В расчетном плане ситуация оказывается особенно простой, когда определяющим является тормозное излучение на ионах. Если от интегральных по лучу зрения значений энергетической яркости сделан переход к локальным величинам $f(v)$ (например, с помощью преобразования Абеля), то связь $f(v)$ с ФР $\varphi(\varepsilon)$ такова (см., например, [67]):

$$f(v) = C \int_{hv}^{\infty} \varepsilon^{-1/2} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (10.18)$$

где $C \sim Z^2 N_e N_i$ (Z — эффективный заряд ионов, N_i — их плотность). Для слабо неоднородной плазмы специального перехода к локальным величинам обычно не производят и полагают $C \sim Z^2 N_e N_i l_0$, где l_0 — характерный размер плазмы по лучу зрения. Отметим еще широко используемый на практике результат: если подставить в (10.18) максвеллово распределение (10.5), то для $f(v)$, имеющей смысл локального (в точке r) коэффициента испускания $\varepsilon(v, r)$, получаем

$$\varepsilon(v, r) = \alpha Z^2 G_{ff} N_e(r) N_i(r) (k T_e(r))^{-1/2} \times \\ \times \exp[-hv/kT_e(r)], \quad (10.19)$$

где $\alpha = 6,36 \cdot 10^{-47}$ ед. CGS, G_{ff} — фактор Гаунта.

Вернемся к формуле (10.18). Было бы, конечно, ошибочным пытаться находить $\varphi(\varepsilon)$ по относительным интенсивностям тормозного континуума, как это предлагали некоторые авторы [241], записывавшие соотношение

$$\varphi(v_1)/\varphi(v_2) = f(v_1) v_1^{1/2} / f(v_2) v_2^{1/2}, \quad (10.20)$$

где v_1 и v_2 — два значения модуля скорости электрона. Непосредственно видно, что (10.20) следовало бы из формулы (10.18) лишь в монокинетическом пределе, противоречащем самой постановке задачи.

Последовательное регуляризованное решение обратной задачи, формулируемой в виде уравнения (10.18), осуществили авторы работы [216]. Объектом исследования была адиабатическая ловушка для плазмы, нагреваемой с помощью электронно-циклотронного резонанса. Измерения интенсивности излучения проводились в диапазоне энергий 20—150 кэВ с помощью сцинтилляционного γ -спектрометра с кристаллом NaI (T_e) и амплитудным анализатором. Фактически приходилось решать уравнение, значительно более сложное, нежели (10.18), поскольку необходимо было принять во внимание целый комплекс аппаратных эффектов: конечную разрешающую силу спектрометра, поглощение квантов во входных окнах и упаковке кристаллов и т. п. Соответствующие аппаратные функции удалось аппроксимировать аналитическими формулами, что привело лишь к более сложному ядру уравнения типа (10.18), но не изменило характера задачи. Восстановление $\varphi(\epsilon)$ производилось по классической схеме тихоновской регуляризации, описанной в гл. 6, со стабилизатором $\Omega[\varphi]$ первого порядка. Основным физический результат работы состоял в обнаружении второго локального максимума у $\varphi(\epsilon)$ в области энергий $\epsilon \simeq (80-85)$ кэВ. При этом было показано, что вид ФР существенно не меняется за время сохранения «поперечной» энергии плазмы.

Целый ряд интересных диагностических возможностей открывается при переходе в спектре тормозного излучения из коротковолновой области, использованной в [216], в длинноволновую, а именно в инфракрасный (ИК) континуум в интервале длин волн $3 \lesssim \lambda \lesssim 3 \cdot 10^3$ мкм [189]. Применительно к плазме с $T_e \simeq 1$ эВ и выше обработка результатов абсолютных измерений интенсивности ИК-континуума привлекательна прежде всего потому, что: а) молекулярный спектр практически отсутствует; б) радиационной рекомбинацией при условии $h\nu/kT_e \ll \ll 1$ можно пренебречь; в) наложения циклотронного излучения, возникающего в присутствии магнитного поля, обычно без труда удается избежать. В связи с этим, несмотря на довольно существенные трудности чисто экспериментального характера, ИК-методика уже к 1970 г. нашла применение при диагностике плазмы, создаваемой с помощью ударных труб, в установках, работающих на встречных магнитных полях и в режимах Z- и

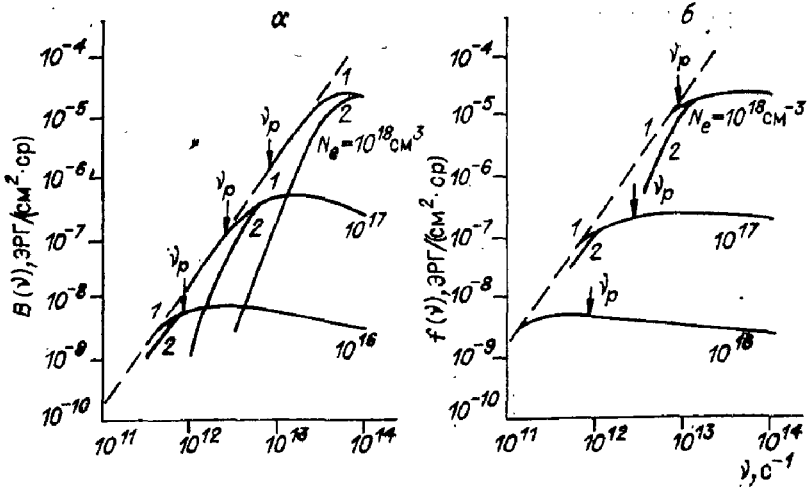


Рис. 38. Участки спектров тормозного континуума в ИК-области для $T_e = 10^4$ К, $l_0 = 1$ см (а) и $T_e = 5 \cdot 10^5$ К, $l_0 = 1$ см (б) (данные расчета [189]).

1 — прямоугольная, 2 — треугольная функции источника.

Θ-пинча, скользящих вакуумных искр, плазменных сгустков, генерируемых электродинамическими инжекторами, плазменных аргоновых струй и т. п. (см. библиографию в работе [189]). За прошедшее время спектр приложений еще более расширился.

На рис. 38 приведены рассчитанные в [189] зависимости $f(\nu)$ в предположении ЛТР. Штриховой линией обозначен ход планковской функции

$$B(\nu, T_e) = 2h\nu^3 c^{-2} [\exp(h\nu/kT_e) - 1]^{-1} \simeq \simeq 3,07 \cdot 10^{-37} \nu^2 T_e. \quad (10.21)$$

В данном случае достаточно приближения Релея — Джинса; T_e измеряется в градусах К, ν — в см^{-1} , B — в $\text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{ср})$; почти во всей рассматриваемой спектральной области существенную роль играет реабсорбция излучения, в связи с чем в основу расчета положено уравнение радиационного переноса. Стрелками на рис. 38 отмечены электронные плазменные частоты $\nu_p = (e^2 N_e / \pi m)^{1/2}$, вблизи которых интенсивность континуума, вообще говоря, должна резко изменяться [67]. Однако участки в области $\nu < \nu_p$ можно отнести к излучению плазмы, электронная плотность которой уменьшена, скажем,

в k раз, а толщина слоя увеличена в k^2 раз; v_p уменьшена при этом в $k^{1/2}$ раз.

Если теперь для оптически прозрачной области производить восстановление $\varphi(\epsilon)$ с помощью (10.18), то помимо условия гладкости $\varphi(\epsilon)$ [216] можно использовать важные дополнительные данные о моментах функции $\varphi(\epsilon)$, которые, в свою очередь, можно извлечь, фиксируя «отсечку» излучения на плазменной частоте, а также область «черного излучения», соответствующую прямолинейному участку на рис. 38. Несколько подобных приемов описаны в [189]. Таким образом, открывается хорошая возможность для применения алгоритмов дескриптивной регуляризации.

В тех случаях, когда собственное излучение плазмы мало, для диагностических целей с помощью (10.18) можно воспользоваться спектром торможения электронов на специально вводимых мишенях [8]. Авторам [8] удалось таким способом зарегистрировать на ФР плато при теоретически предсказанных энергиях; однако в работе использован алгоритм, основанный на поиске монотонных решений, что весьма рискованно, поскольку не всегда можно выявить структуру ФР типа дополнительного максимума.

При диагностике низкотемпературной плазмы со средней энергией электронов порядка 1–10 эВ существенным становится учет тормозного излучения на нейтральных атомах, а также фоторекомбинации. В работе [41] рассматривалась модельная задача о восстановлении ФР по спектру тормозного излучения на атомах. В данном случае вместо формулы (10.18) следует записать:

$$f(\nu) = C_1 \int_{h\nu}^{\infty} Q_a(\nu, \epsilon) \epsilon^{1/2} \varphi(\epsilon) d\epsilon, \quad (10.22)$$

где $C_1 \sim S_0 \nu^2 N_e N_a$,

$$Q_a(\nu, \epsilon) = (16e^2/3mc^2h)\epsilon(1 - h\nu/2\epsilon)(1 - h\nu/\epsilon)^{1/2}Q_p(\epsilon),$$

S_0 — сечение токовой области разряда, N_a — концентрация нейтралов, $Q_p(\epsilon)$ — эффективное сечение передачи импульса при столкновении электрона с атомом [246]. Хотя по сравнению с (10.18) формула (10.22) является более громоздкой, в чисто математическом отношении процедура решения остается прежней, и мы не будем оста-

навливаться на чисто технических деталях. Отметим только полезную для качественных оценок зависимость $f(\nu)$ от силы разрядного тока i_α , давления p и поперечного сечения S_0 :

для тормозного излучения электронов на ионах $f(\nu) \sim i_\alpha^2 \times S_0^{-1}$, для тормозного излучения электронов на атомах $f(\nu) \sim i_\alpha p$, для участка континуума молекулярного спектра $f(\nu) \sim i_\alpha S_0$.

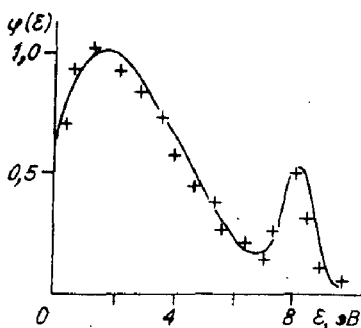
Вопрос о восстановлении ФР при одновременном учете как тормозных, так и фоторекомбинационных процессов рассматривался в работе [269]. Ядро интегрального оператора представляется в этом случае в виде суммы

$$K(\nu, \varepsilon) = K_1 + K_2, \quad (10.23)$$

где K_1 относится к тормозному спектру, а

$$K_2 = Ah\nu \sum_n \sigma_n \delta(h\nu - \varepsilon - \varepsilon_n) \quad (10.24)$$

— к фоторекомбинационному. Здесь ε_n — энергия ионизации с n -го уровня, $\sigma_n(\nu)$ — сечение процесса фотоионизации, $A = \text{const}$. Обычно сумму в (10.24) удается ограничить сравнительно небольшим числом членов. Если вдобавок средняя энергия электронов $\langle \varepsilon \rangle \ll (E_n - E_{n-1})$, то интенсивность фоторекомбинации пропорциональна $\varphi(h\nu - E_n)$, так что с учетом тормозного излучения мы приходим к устойчивому линейному интегральному уравнению 2-го рода. Коль скоро в операторе K_2 все же приходится учитывать несколько членов суммы, то, как показывает анализ [269], в результате алгебраизации задачи мы вновь приходим к системе линейных уравнений с достаточно хорошо обусловленной матрицей. Выполненные модельные расчеты относились к излучению водородной плазмы в области бальмеровского континуума. Эмиссионный спектр оказался весьма чувствительным к форме ФР; в качестве примера на рис. 39 сплошной линией по-



рой плазмы в области бальмеровского континуума. Эмиссионный спектр оказался весьма чувствительным к форме ФР; в качестве примера на рис. 39 сплошной линией по-

Рис 39. Модельная задача по восстановлению ФР электронов по энергиям из бальмеровского континуума; — исходная ФР; +++ результат восстановления.

казана заданная двугорбая ФР (I), а Z — результат ее восстановления в условиях «наброса» на вычисленный спектр 3%-ной случайной погрешности.

§ 3. Определение плазменных ФР по линейчатому спектру

Различные аспекты связи ФР электронов по энергиям с формой контура линии оптического спектра, а также с ее интегральной интенсивностью рассматривались в нескольких работах. Так, Куперман [278], исходя из простой двухуровневой модели атома, оценивал влияние отличия ФР свободных электронов от максвеллова распределения на радиационные потери плазмы и установил, что это влияние может быть чрезвычайно сильным.

В [185] сделаны некоторые оценки влияния неравновесности ФР на форму и интенсивность отдельной линии в условиях оптически тонкой и оптически плотной плазмы. В частности, показано, что при прочих равных условиях в случае немаксвелловой ФР должен иметь место более крутой спад функции источника от центра к границе плазмы; контур линии при этом сильнее самообращен, а интегральная интенсивность уменьшена. Однако вопрос о том, правомерна ли в связи с подобными выводами постановка обратной задачи о восстановлении ФР по характеристикам линейчатого спектра, по существу, в указанных работах остался открытым. Фактически большинство экспериментаторов отвечало на этот вопрос отрицательно, поскольку, например, ту или иную дополнительную деформацию профиля линии можно отнести за счет различных факторов, не обязательно связанных с видом ФР электронов по энергиям.

Более радикальный с точки зрения эксперимента, хотя и менее универсальный в теоретическом плане подход был предложен в работе [253]. Если считать, что для описания оптического спектра плазмы применима корональная модель (предполагается, что заселение уровней идет за счет прямого электронного возбуждения и каскадных процессов, а дезактивация — за счет спонтанных переходов на нижележащие уровни), то для набора полных интенсивностей линий можно записать выражение

$$I(x) = CN_0 N_e v(x) \int_{\epsilon_R(x)}^{\infty} Q(x, \epsilon) \epsilon^{1/2} \varphi(\epsilon) d\epsilon. \quad (10.25)$$

Здесь N_0 — концентрация нормальных атомов, Q — эффективное сечение возбуждения, $\varepsilon_k(x)$ — пороговая энергия возбуждения. Величина x , конечно, не является непрерывным аргументом функций I , ν и Q : фактически это номер линии; однако x с определенной степенью приближения можно трактовать как некий «размазанный по спектру» параметр, что формально позволяет расценивать соотношение (10.25) как интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода относительно $\varphi(\varepsilon)$. Тогда, решая (10.25), можно получить информацию о распределении электронов в диапазоне энергий $[a, b]$, где величины a и b определяются из условий:

$$a = \min \{ \varepsilon_k(x) \}, \quad b = \min \{ b_k \},$$

$$\int_a^b Q(x, \varepsilon) \varepsilon^{1/2} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \simeq \int_a^\infty Q(x, \varepsilon) \varepsilon^{1/2} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (10.26)$$

Выражение (10.25), вообще говоря, нетрудно обобщить, приняв, например, во внимание ступенчатые процессы, когда

$$I(x) = CN_e \nu(x) \left\{ N_0 \int_{\varepsilon_k(x)}^\infty Q(x, \varepsilon) \varepsilon^{1/2} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k-1} \left(A_{ki} / \sum_{r < k} A_{kr} \right) N_{0i} \int_{\varepsilon_{ki}(x)}^\infty Q_{ik}(x, \varepsilon) \varepsilon^{1/2} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \right\}, \quad (10.27)$$

где N_{0i} — заселенность i -го энергетического уровня, Q_{ik} — сечение ступенчатого $i \rightarrow k$ возбуждения, A_{ki} — вероятности спонтанных переходов $k \rightarrow i$, $\varepsilon_{ki}(x) = \varepsilon_k(x) - \varepsilon_i(x)$. Решение обратной задачи о восстановлении $\varphi(\varepsilon)$ в форме (10.27) при наличии необходимых для расчета данных позволило бы, конечно, значительно расширить как диапазон исследуемых плазменных объектов, так и диапазон энергий $[a, b]$. Однако дефицит надежных данных, касающихся Q_{ik} , A_{ki} и т. п., пока что сдерживает такого рода работы.

Результаты обстоятельного математического моделирования задачи в форме (10.25) содержатся в статье [42]. В частности, проведением регуляризации по Тихонову изучались зависимости точности восстановления ФР от закона распределения погрешностей отношения

I/N_0N_e , уровня этих погрешностей, числа использованных линий, вида функции $Q(x, \epsilon)$; исследовалась также возможность восстановления тонкой структуры ФР. В другой работе той же группы авторов [40], а также в уже упомянутой публикации [375] приводятся данные обработки диагностического эксперимента для положительного столба низковольтной дуги в гелии. Привлекались как синглетные, так и триплетные линии гелия с резко различной формой функций оптического возбуждения. Интересный результат этих исследований — установление факта значительного дефицита быстрых электронов в плазме, нараставшего с увеличением давления. Та же методика применялась Е. А. Кралькиной [104] для изучения отрицательного свечения разряда в гелии (при этом для энергий $\epsilon \simeq 30$ эВ зафиксирован локальный максимум), а также радиального катафореза в смеси гелия с натрием. Кроме того, по найденным ФР восстановлено эффективное сечение возбуждения линии гелия 7065 \AA от порога до 40 эВ, которое в пределах погрешности эксперимента совпало с сечением, измеренным методом электронных пучков. Таким образом, несмотря на положенную в основу метода заведомо упрощенную физическую модель, прием восстановления $\varphi(\epsilon)$ по набору интенсивностей линий зарекомендовал себя положительно.

Линейчатый спектр может быть богатым источником информации и о других ФР, важных для задач физики плазмы. Рассмотрим, в частности, обратную задачу для ФР микрополя плазмы, исследованную в работе [26].

Как известно, вычислениям внутриплазменного электрического поля $\varphi(E)$ посвящено много работ (см., например, монографию [112] и обзор [128]). Так, уже более шести десятилетий назад Хольцмарком при простейших приближениях (ионы неподвижны и их положения не коррелированы, воздействие электронов пренебрежимо мало) получен следующий результат:

$$\varphi(E)dE = \varphi(E) \cdot 4\pi E^2 dE = \mathcal{H}(E/E_0)dE/E,$$

$$\mathcal{H}(\beta) = (2\beta/\pi) \int_0^{\infty} \sin \beta x \cdot \exp(-x^{3/2}) dx, \quad (10.28)$$

$$E_0 = 2,603 \cdot e N_e^{2/3}, \quad \int_0^{\infty} \mathcal{H}(\beta) d\beta = 1.$$

В данном случае ФР зависит только от модуля поля и описывает переход от гауссова распределения слабых полей к бинарному распределению сильных полей. Общеизвестно значение ФР Хольцмарка для построения теории контура спектральных линий в плазме и решения множества других задач статистической теории плазмы.

В дальнейшем разными авторами предпринимались многочисленные попытки уточнить результаты Хольцмарка. Наибольшую известность получили работы Эккера и Мюллера (см. монографию [249]), Мозера и Баранже [257], Хупера [301]. Так, в работе [257] за исходную в расчете $\varphi(E)$ взята точная формула

$$\varphi(E) = \left[\int \delta \left(E - \sum_i eZ_i r_i / r_i^3 \right) \exp \left(-H(p_i, r_i) / kT \right) \times \right. \\ \left. \times \prod_i dp_i dr_i \right] \left[\int \exp \left(-H(p_i, r_i) / kT \right) \prod_i dp_i dr_i \right]^{-1}, \quad (10.29)$$

где $H(p_i, r_i)$ — гамильтониан системы, а интегрирование ведется по всему конфигурационному пространству. Групповое разложение по степеням плотности заряженных частиц дает в нулевом порядке формулу Хольцмарка, а в первом порядке — результат, практически совпадающий с выкладками [249, 301]. Вычисления возможны и в следующих порядках, однако они весьма громоздки.

Естественный интерес вызывает задача восстановления ФР плазменного микрополя непосредственно из эксперимента, в частности по линиям водородного спектра. Длительное время на этом пути вставали серьезные препятствия, вызываемые не только неустойчивостью соответствующей обратной задачи. В работе [26], однако, показано, что восстановление $\varphi(E/E_0)$ по контуру линии H_β бальмеровской серии вполне реалистично. К числу преимуществ, связанных с выбором именно этой линии, относятся высокая степень изученности физических факторов, определяющих форму контура H_β , отсутствие у этой линии несмещенного штарковского компонента, малое влияние на контур эффекта Доплера, самопоглощения, столкновений типа атом — атом, относительная легкость учета аппаратных искажений, удобный для измерений спектральный интервал.

Возьмем для простоты часто получаемую в дуговых разрядах равновесную водородную плазму с температурой $T = 1 \div 2$ эВ и концентрацией электронов $N_e = 10^{16} \div 10^{18}$ см⁻³. В этих условиях уширение контура бальмеровской линии электронами можно рассматривать в ударном, а уширение ионами — в квазистатическом приближениях [128]. Тогда задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$(\gamma_e/2\pi) \sum_k N_k I_k \int_0^\infty \varphi(\beta) [(\omega - \omega_0 - C_k \beta)^2 + \gamma_e^2/4]^{-1} d\beta = \\ = f(\omega) - \Delta f_1 - \Delta f_2. \quad (10.30)$$

Здесь Δf_1 и Δf_2 — соответственно поправки на нестатичность поля ионов и его неоднородность на длинах порядка атомных к «экспериментальному» контуру $f(\omega)$, относимому к некоторой точке плазмы и содержащему случайную погрешность измерений; N_k , I_k и C_k — заселенности верхних подуровней, индивидуальные интенсивности и коэффициенты смещения штарковских составляющих линии; ω_0 — центральная частота; γ_e — электронная ударная полуширина; $\beta = E/E_0$. Техника расчета величин N_k , I_k и C_k хорошо известна [68]; полуширина γ_e рассчитывается по формуле

$$\gamma_e = 16N_e \langle v_e \rangle \rho_0^2 [0,33 + \ln(\rho_D/\rho_0)], \quad (10.31)$$

где $\rho_0^2 = 2\hbar^2 (n^5 + n'^5)/m^2 \langle v_e \rangle^2$, $\langle v_e \rangle = (8kT/\pi m)^{1/2}$,

n и n' — главные квантовые числа верхнего и нижнего уровней, ρ_D — дебаевский радиус. Отметим еще, что поправка Δf_1 приводит к некоторому «заглаживанию» провала в центре линии, а Δf_2 — к асимметрии области провала; их явный вид здесь не приводится (см. для справок обзор [128]).

В [26] обратная задача решалась методом статистической регуляризации. При моделировании использовались ФР Хольцмарка, Хупера, Баранже — Мозера с вариацией основных параметров плазмы (T , N_e). В этих расчетах, включавших, конечно, введение в правую часть (10.30) случайной составляющей, имитировавшей ошибки эксперимента (3—5%), работоспособность алгоритма была

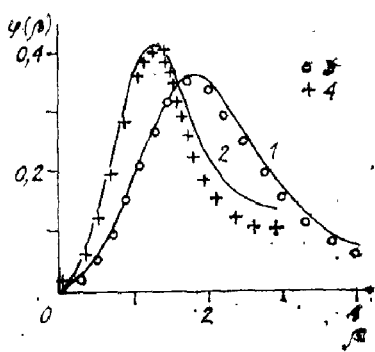


Рис. 40. Результаты восстановления ФР микрополя плазмы.

1 — распределение Хольцмарка (точное решение); 2 — распределение Баранже — Мозера ($N_e = 1,7 \cdot 10^{17}$ см⁻³, $T = 17\,800$ К, $p = 0,94$ атм); 3 — восстановленное распределение с коэффициентом вариации правой части 4%; 4 — обработка эксперимента Берингера.

полностью подтверждена (рис. 40). Во всех случаях заметные расхождения между точным и восстановленным решениями обнаруживались лишь при больших значениях β , соответствующих «хвостовой» части $\varphi(\beta)$.

Далее обрабатывались экспериментально полученные контуры линии H_β , представленные авторам Берингером [26]; описание техники эксперимента содержится в [260]. Съемки контуров сопровождалась независимыми измерениями давления p и локальных значений температуры плазмы. Электронная плотность N_e находилась непосредственно из уширения линии H_β по стандартной методике [68]; состав плазмы рассчитывался в предположении ЛТР, причем при подсчете атомных статистических сумм

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \exp(-E_n/kT) \quad (10.32)$$

ряд не обрывался на некотором конечном номере $n = N$, а оставался формально бесконечным, но зато вместо статистических весов g_n входили произведения $g_n \alpha_n$. Коэффициенты α_n характеризуют вероятность ионизации атома с уровня n за счет взаимодействия с микрополем; они легко вычисляются (например, для модели Хупера) квантованием спектра атома водорода в параболических координатах [198]. Отметим, что значения N_e , получавшиеся при расчете состава плазмы, были близки (в пределах 10—15%) к значениям, найденным по контуру линии H_β .

После этих предварительных расчетов находилось регуляризованное решение уравнения (10.30). Типичный результат показан на рис. 40, 4. Его можно было аппроксимировать ФР, рассчитанными по модели Баранже — Мозера [257] или Хупера [301] (различие между ними в данном случае несущественно) (см. рис. 40, 2). Отметим,

что функции $\varphi(\beta)$ соответствует число частиц в дебаевской сфере $N_D \simeq 8$. Расхождения между восстановленной и аппроксимирующей ФР намечаются при $\beta \gtrsim 2$, т. е. в области, где, с одной стороны, хуже действует алгоритм восстановления, а с другой — вступает в силу приближение «ближайшего соседа» [112].

§ 4. Определение кинетических характеристик плазмы по спектру рассеяния лазерного излучения

В отличие от ранее рассмотренных методов техника лазерного рассеяния при правильном ее применении позволяет избавиться от посторонних возмущений, вносимых в плазму (зонды Ленгмюра), а также от необходимости совершать весьма нетривиальный переход к локальным величинам от измеренных интегральных (спектроскопия). Лазерное рассеяние обеспечивает высокое пространственное и временное разрешение для широкой области плазменных режимов и основных определяющих параметров.

Рассмотрим вопрос о восстановлении ФР электронов и ионов плазмы по энергиям и компонентам скорости с помощью излучения $I_s(\omega_s)$, рассеянного под углом θ в телесный угол $d\Omega$ при условии, что это излучение фиксируется на расстоянии, значительно превышающем как лазерную длину волны, так и размер исследуемого участка плазмы. Хорошо известно (см., например, [76, 190, 245]), что

$$I_s(\omega_s) d\Omega d\omega_s = I_i r_0^2 H N_e f(\mathbf{k}, \omega) d\Omega d\omega_s, \quad (10.33)$$

где I_i — средняя мощность падающего излучения, $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона, H — геометрический фактор задачи, $f(\mathbf{k}, \omega)$ — функция спектральной плотности, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$, $\omega = \omega_s - \omega_i$, $k = (4\pi/\lambda) \sin(\theta/2)$ — модуль волнового вектора, индексы «s» и «i» характеризуют рассеянное и падающее излучение.

ФР по скоростям (аргумент-вектор) для электронов и ионов плазмы определяют спектральную плотность $f(\mathbf{k}, \omega)$ довольно сложным образом. Ограничиваясь случаем незамагниченной бесстолкновительной стационарной плазмы и условием, когда релятивистские эффекты пренебрежимо малы, можно, следуя Розенблюту и Рос-

токеру [350], записать следующую формулу, связывающую f , φ_e и φ_i :

$$f(\mathbf{k}, \omega) = (2\pi/k) |1 - G_e/\epsilon|^2 \varphi_e(\omega/k) + (2\pi Z/k) |G_i/\epsilon|^2 \varphi_i(\omega/k). \quad (10.34)$$

Здесь Z — заряд иона, G_e , G_i — электрические восприимчивости, определяющие диэлектрическую проницаемость плазмы: $\epsilon = 1 + G_e + G_i$. Связь G_e и G_i с φ_e и φ_i исследована Ландау и для электронов имеет вид

$$G_e(\mathbf{k}, \omega) = (\omega_{pe}/k^2) \int [\mathbf{k}/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})] (\partial\varphi_e/\partial\mathbf{v}) d\mathbf{v} + (i\pi\omega_{pe}^2/k^2) \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) k (\partial\varphi_e/\partial\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (10.35)$$

где ω_{pe} — электронная плазменная частота, первый интеграл берется в смысле главного значения, а слагаемое с мнимой единицей описывает процесс недиссипативного затухания. Выражение для ионной восприимчивости по структуре повторяет (10.35) с соответствующими заменами: $\varphi_e \rightarrow \varphi_i$, $\omega_{pe} \rightarrow \omega_{pi}$.

Таким образом, обратная задача восстановления $\varphi_e(\mathbf{v})$, $\varphi_i(\mathbf{v})$ по спектру $I_s(\omega_s)$ даже при упомянутых раньше значительных физических упрощениях остается нелинейной и представляется весьма сложной.

Тем не менее возможны дальнейшие упрощения. Приводя задачу к безразмерной форме, мы убеждаемся, что перед интегралами появляется характерный параметр $\alpha = (k\rho_D)^{-1}$, где ρ_D — дебаевский радиус, причем для неравновесной $\varphi_e(\mathbf{v})$ в ρ_D вместо температуры должна входить характерная энергия электронов. Величину α обычно называют параметром Солпитера. Когда $\alpha \ll 1$, электроны рассеивают падающую волну некоррелированно, что позволяет радикально упростить связь между $f(\mathbf{k}, \omega)$ и $\varphi_e(\mathbf{v})$ (ФР ионов в этом случае как бы вырождается в δ -функцию)

$$f(\mathbf{k}, \omega) |_{\alpha \rightarrow 0} = (2\pi/k) \int \varphi_e(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (10.36)$$

Обращаясь к результатам гл. 9, видим, что (10.36) есть преобразование Радона функции $\varphi_e(\mathbf{v})$ в трехмерном пространстве скоростей, откуда следует, что

$$\varphi_e(\mathbf{v}) = - (8\pi^2)^{-1} \int \left[\frac{d^2 f(\omega/k)}{d(\omega/k)^2} \right] \Big|_{\omega/k = \mathbf{v}\mathbf{k}/k} d\Omega. \quad (10.37)$$

В некоторых случаях удобнее воспользоваться выражением

$$\begin{aligned} \Phi_e(\mathbf{v}) = & (-8\pi^2)^{-1} \nabla_{\mathbf{v}}^2 \int \int f(\omega/k, \mathbf{k}) \times \\ & \times \delta[(\omega/k) - (\mathbf{v}\mathbf{k}/k)] d(\omega/k) d\Omega, \end{aligned} \quad (10.38)$$

также следующим из теории инверсии Радона. Вильямсон и Кларк [381] рассмотрели ряд вычислительных аспектов, связанных с формулами (10.37) и (10.38), а также попытались оценить влияние на процесс восстановления $\Phi_e(\mathbf{v})$ релятивистских эффектов. Для надежного определения трехмерной ФР электронов по скоростям, вообще говоря, необходимы измерения спектра рассеяния по многим направлениям. Мы сталкиваемся здесь с одной из типичных томографических задач, которые более подробно обсуждаются ниже.

Для сферически-симметричной (в пространстве скоростей) задачи восстановление ФР по модулю скорости $\Phi_e(v)$ оказывается особенно простым. В самом деле, поскольку для некоторой проекции v_x

$$f(v_x) = 2\pi \int_{v_x}^{\infty} \varphi(v) dv, \quad (10.39)$$

то

$$\varphi(v) = - (2\pi v)^{-1} (df/dv_x) \Big|_{v_x=v}. \quad (10.40)$$

Любопытно, что в данном случае переход к одномерной задаче дает формулу обращения более простую, чем формула абелевой инверсии.

Разумеется, во всех рассмотренных выражениях предполагается, что задача восстановления ФР будет решаться с применением методов регуляризации. Подчеркнем, что, подстановка в (10.36) максвелловой функции для $\Phi_e(\mathbf{v})$ дает чисто гауссову форму спектра рассеяния; при этом по интенсивности сигнала рассеяния находится N_e , а по полуширине — температура T_e .

По мере роста параметра Солпитера α структура спектра рассеяния даже для равновесной плазмы эволюционирует довольно сложным образом: интенсивность в центре линии рассеяния уменьшается, а центральный максимум заглаживается; на частотах, определяемых дисперсионным соотношением Бома — Гросса

$$\omega^2 \simeq \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \rho_D^2), \quad (10.41)$$

по обе стороны от центра линии появляются сателлиты, интенсивность которых нарастает. Кроме того, в центре линии возникает узкий пик с шириной, характеризующей тепловую скорость ионов. При неравновесных φ_e и φ_i картина становится еще сложнее.

Как отмечалось, если при $\alpha \ll 1$, определить истинную ионную ФР не удастся, то при $\alpha \gg 1$ ситуация меняется на обратную, хотя возможность восстановить электронную ФР при этом все-таки остается. Наиболее интересна промежуточная область, когда в принципе обе ФР можно пытаться находить по одному спектру рассеяния. Важно, что при этом нет особых проблем с разделением вклада в спектр от той и другой ФР, поскольку имеет место резкое различие средних скоростей электронов и ионов; благодаря чему сначала при крупномасштабном разбиении спектра можно находить φ_e , а затем, переходя к более мелкому масштабу, φ_i . В математическом отношении обе обратные задачи совершенно идентичны; вследствие этого можно принять, что в (10.34) $\varphi_i = G_i = 0$ и исследовать нелинейное уравнение в безразмерной форме вида

$$f(x) = |1 + G[\varphi]|^{-2} \varphi(x), \quad (10.42)$$

$$G[\varphi] = \alpha^2 \left\{ \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y)^{-1} [d\varphi/dy] dy + \right.$$

$$\left. + i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y) [d\varphi/dy] dy \right\}.$$

В указанной постановке задача изучалась А. Е. Булышевым и А. Е. Суворовым.

При решении задачи удобно ввести конечные отрезки, определяющие пределы изменения переменных x и y , а также равномерные сетки на них. Интегральный оператор алгебраизуется обычным образом по формуле трапеций, для дифференциальных операторов берется второй порядок точности по шагу в соответствии с формулой $(\varphi')_i = (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})/2h$. На концах отрезка с учетом физического содержания задачи можно выбрать нулевые граничные условия

$$(\varphi')_1 = (\varphi')_N = 0. \quad (10.43)$$

Таким образом,

$$K_n(\varphi) = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (10.44)$$

где K — нелинейная вектор-функция от φ . Далее, согласно схеме, описанной в гл. 8, не представляет труда вычислить матрицу Фишера задачи, определить ее собственные числа, а также оценить «коэффициенты усиления» γ_n погрешностей восстановления компонентов вектора φ_n .

Была выполнена большая серия модельных расчетов с различными ФР $\varphi(x)$, в результате которых выяснилось, что во всех случаях величины $\gamma_n \simeq 1$, иными словами, обратная нелинейная задача, формулируемая в виде (10.42), устойчива. Из чисто качественных соображений по структуре первой из формул (10.42) этот результат можно было предвидеть, хотя прямой расчет представлялся все же необходимым. Подчеркнем, что вывод об устойчивости задачи относится, вообще говоря, только к идеализированной ее постановке, когда аппаратная функция прибора, регистрирующего спектр рассеяния, предполагается δ -образной, падающая волна считается идеально плоской и монохроматической и т. п. Тем не менее неустойчивость задачи, которая может проявиться в реальной ситуации при учете осложняющих ее факторов, устраняется с помощью стандартных методов регуляризации.

Для решения системы уравнений (10.44) можно далее применять различные методы, описанные, например, в [233]. Удобен, в частности, в силу быстрой сходимости и простоты реализации на ЭВМ метод Ньютона:

$$\varphi^{(k+1)} = \varphi^{(k)} + J^{-1}(\varphi^{(k)}) [f - K(\varphi^{(k)})], \quad (10.45)$$

где матрица Якоби $J \equiv \{\partial K_n / \partial \varphi_m\}$ обращается методом Гаусса — Жордана. Обратим внимание еще на одну расчетную деталь. Если за начальное приближение в (10.45) выбрать наблюдаемый спектр рассеяния, отягощенный, разумеется, случайной погрешностью, то при вычислении производных ($d\varphi/dx$) в силу неустойчивости операции дифференцирования случайной функции итерационный процесс (10.45) может быть расходящимся несмотря на устойчивость задачи в целом. В этом случае, однако, трудность устраняется использованием сглаживающей сплайн-аппроксимации [204].

Прямые модельные расчеты осуществлялись по схеме «замкнутого цикла» с различными ФР. Один из результа-

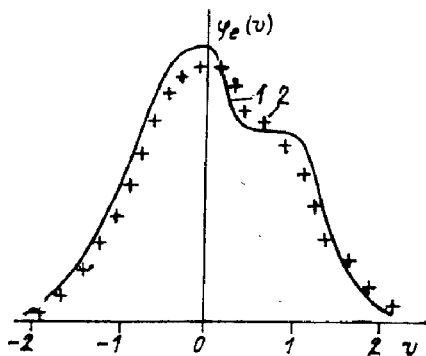


Рис. 41. Пример восстановления ФР электронов по модулю скорости v из спектра томсоновского рассеяния. Уровень шума в спектре 10%.
1 — точное решение; 2 — результат восстановления.

тов, когда вводимая в $f(x)$ погрешность составляла 10% от значения ординаты в каждой точке, приведен

на рис. 41. Следует отметить, что оценки γ_n с помощью матрицы Фишера, которые неизбежно являются приближенными в силу нелинейности задачи, тем не менее во всех случаях хорошо согласуются с распределением погрешностей, даваемым прямым расчетом. Таким образом, процедура восстановления ФР электронов и ионов плазмы по скоростям на основе спектров лазерного рассеяния в широком диапазоне значений параметра Солпитера может быть рекомендована для обработки реального диагностического эксперимента.

§ 5. Задачи двумерной плазменной томографии

Перейдем к рассмотрению некоторых характерных примеров многомерных обратных задач локальной диагностики плазмы.

Прежде всего проиллюстрируем результаты применения алгоритмов, описанных в гл. 9 (§ 3), к задаче восстановления асимметричного температурного поля аргоновой дуги, помещенной в продольное магнитное поле [138—140]. Длина дуги и внутренний диаметр канала составляли 90 и 3 см соответственно; давление в камере — 10^5 Па; ток дуги — 100 А; расход газа — 0,25 г/с при направлении потока от катода к аноду. Центральная часть электродугового столба помещалась в продольное магнитное поле, которое создавалось двумя соленоидами. Предварительные исследования показали, что без наложенного магнитного поля дуговой столб стационарен и занимает центрально-симметричное положение. Начиная с некоторого значения индукции магнитного поля, дуга становит-

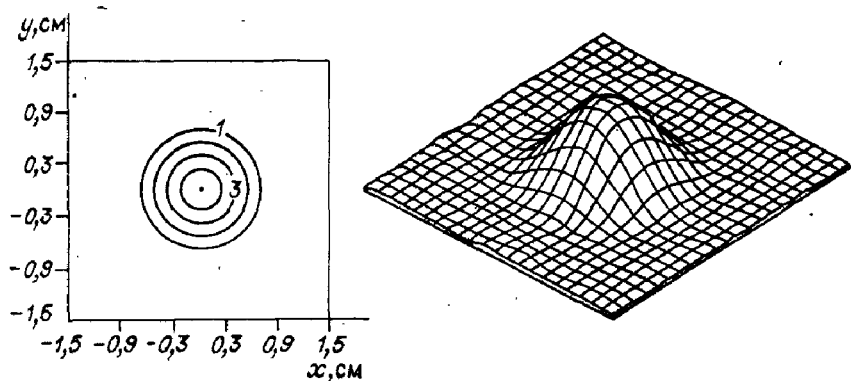


Рис. 42. Восстановление поля температур $T(x, y)$ осесимметричной дуги в аргоне по алгоритму (9.72), (9.73); $B = 0$, $z = 10$ см.
1 — 8700 К, 2 — 9150, 3 — 9400, 4 — 9550 К.

ся нестационарной и ее аксиальная симметрия нарушается. Для определения поля температур измерялось поперечное распределение абсолютной интенсивности излучения плазмы $I(\rho, \xi)$ в континууме одновременно с шести направлений наблюдения путем фотографирования кинокамерой СКС-1М блока световодов [140]. Съёмки проводились в области пропускания интерференционного светофильтра с максимумом на длине волны 465 нм и полушириной спектрального интервала 5 нм. Время экспозиции кадра 0,25 мс. Полученные изображения показали, что уже при индукции магнитного поля $B = 0,001$ Т нарушается осевая симметрия плазменного столба, он смещается от оси камеры и вращается вокруг оси.

На рис. 42 приведен результат обработки с помощью описанного алгоритма обратного преобразования Радона с использованием сглаживающих сплайнов (9.72), (9.73) данных измерений $I(\rho, \xi)$ для случая выключенного магнитного поля ($B = 0$); расстояние от катода $z = 10$ см. Как видно из рисунка, максимум температуры находится строго в центре камеры и $T_{\max} = 9660$ К; ошибки восстановления осесимметричного объекта невелики, что является хорошей проверкой не только алгоритма восстановления, но и процедуры калибровки пропускания излучения световодами, а также геометрической привязки оптической системы измерений к центру камеры.

На рис. 43 приведены примеры восстановления полей $\epsilon(x, y)$ аргоновой дуги при включенном магнитном поле в

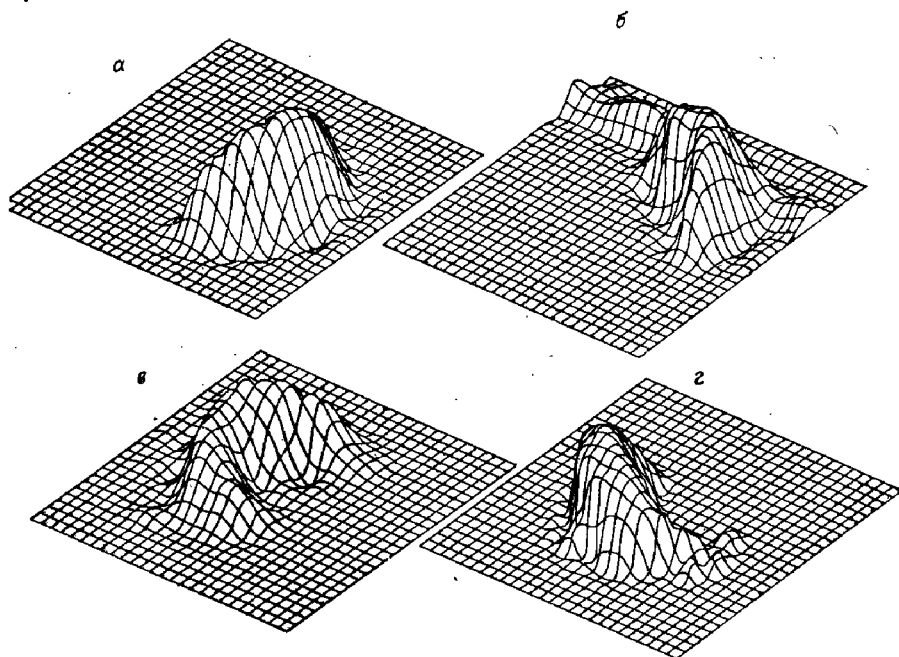


Рис. 43. Поля температур аргоновой винтовой дуги в продольном магнитном поле ($B = 0,001$ Т, $z = 45$ см, $Q = 0,25$ г/с, $I_0 = 100$ А, $D = 3$ см) в четыре момента времени t .
 а — 3,3 мс (9920 К); б — 7,5 мс (9860 К); в — 9,9 мс (9500 К); г — 13,5 мс (9730 К).

различные моменты времени. На рис. 44 изображено последовательное во времени положение изолинии температуры $T = 9150$ К, отражающее динамику вращения дугового столба плазмы в продольном магнитном поле за один оборот плазмы вокруг оси камеры.

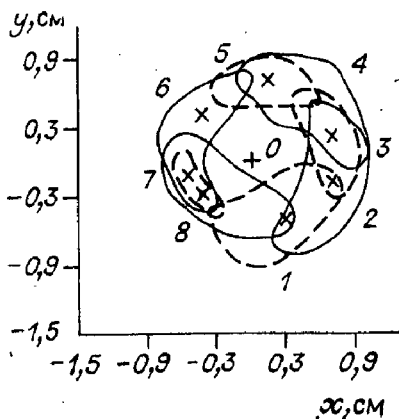


Рис. 44. Динамика локальных полей температур аргоновой дуги (ее параметры те же, что и на рис. 43) — последовательное изменение во времени изолинии температуры $T = 9150$ К, O — центр канала.

— 8 — положения максимумов температур соответственно: 1 — 9820 К (0 мс); 2 — 9920 К (3,3 мс); 3 — 9880 К (5,7 мс); 4 — 9860 К (7,5 мс); 5 — 9590 К (8,4 мс); 6 — 9500 К (9,9 мс); 7 — 9340 К (12,0 мс); 8 — 9730 К (13,5 мс).

Следует отметить, что развитие подобных пространственно-временных исследований в реальном эксперименте эволюции электрической дуги должно привести к существенному совершенствованию теории дугового столба [224].

Уместно будет упомянуть здесь также работу [334], в которой авторы выполнили восстановление локальных профилей интенсивности спектральных линий гелия и водорода в тороидальной установке Томас IV. Реконструкция проводилась одним из методов бурно развивающейся рентгеновской томографии [294, 359].

До сих пор при рассмотрении спектральных методов диагностики плазмы мы ограничивались в основном оптически тонкой плазмой. Однако такое ограничение не всегда выполнимо в практически важных случаях, поэтому существенное значение имеет распространение рассмотренных нами алгоритмов на задачи с реабсорбцией излучения [140, 163].

Мы уже упоминали параметрические подходы к этой проблеме (см. гл. 8). В рамках малопараметрического моделирования обычно отыскиваются оптическая плотность, характеристики функции источника $S(\tau)$ и параметры контура линии тонкого слоя. Один из немногих случаев, когда можно найти $S(\tau)$ непосредственно, не привлекая упрощенных модельных соображений, относится к одномерной геометрии. Это прежде всего плоскопараллельный слой, например фотосферы большинства звезд [201, 318] (см. гл. 5). Другая одномерная модель — вариант вращательной симметрии (см. формулы (2.20)).

Рассмотрим теперь метод восстановления локальных коэффициентов эмиссии $\varepsilon(x, y)$ в общем случае несимметричного оптически плотного плазменного объема [163, 341, 342]. Итак, необходимо решить уравнение

$$I(p, \xi) = \int_{s_1}^{s_2} \varepsilon(x, y) \exp \left[- \int_s^{s_2} \kappa(x, y) ds' \right] ds \quad (10.46)$$

относительно неизвестной функции $\varepsilon(x, y)$, если $\kappa(x, y)$ найдена в результате трансмиссионных измерений из преобразования Радона. Проведем описывающую изучаемую область плазмы окружность радиуса R и разобьем получившийся круг на concentрические окружности $\{r_i\}$

и угловые секторы $\{\theta_j\}$. Введем также сетку по переменным ξ и p (рис. 45). Переходя к полярной системе координат в (10.46), можно получить [163]

$$I(p, \xi) = p \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^{-2} \theta \cdot \varepsilon(r, \theta + \xi) \times \\ \times \exp \left[-p \int_{\theta}^{\theta_2} \kappa(r, \theta' + \xi) \cdot \sin^{-2} \theta' d\theta' \right] d\theta, \quad (10.47)$$

где $r = p/\sin(\theta - \xi)$, $\theta_1 = \theta_{j_2}$, $\theta_2 = \theta_{j_1}$ (см. рис. 45). Если теперь ввести кусочно-постоянную аппроксимацию функции $\varepsilon(r, \theta)$ по r и пока произвольную по θ , то в итоге получается расщепление исходной двумерной задачи на серию одномерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$\hat{I}_p(\xi) = p \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^{-2} \theta \cdot \varepsilon_p(\theta + \xi) \cdot \exp \left[-p \int_{\theta}^{\theta_2} \kappa_p(\theta' + \xi) \times \right. \\ \left. \times \sin^{-2} \theta' d\theta' \right] d\theta. \quad (10.48)$$

Здесь $\varepsilon_p(\theta) = \varepsilon(r = p, \theta)$, $\hat{I}_p(\xi)$ — интенсивность излучения, выходящего только из i -го кольца радиуса $r_i \geq \geq |p_i|$ в направлении ξ (рис. 45). В результате такого расщепления можно получать локальные коэффициенты эмиссии послойно, двигаясь от внешнего кольца к внутренним; тем самым резко сокращаются требуемые ресурсы ЭВМ по памяти и времени счета. Подробное изложение алгоритма решения полученного уравнения и его исследование в модельных задачах содержатся в работе [163].

Частный вариант метода послойного расщепления для $\kappa(r, \theta) \equiv 0$ впервые описан Ченом и Гулардом [271] на примере спектральных исследований газовых смесей.

Регуляризация задачи

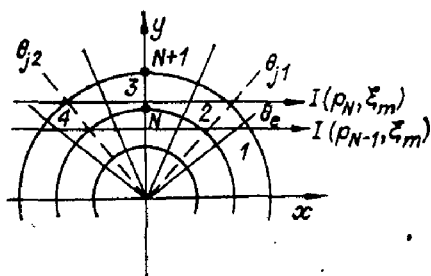


Рис. 45. Схема послойного расщепления.

проводилась по схеме Филлипса—Туоми [367] (см. гл. 5).

В более общем случае $\kappa > 0$ алгоритм решения уравнений (10.48) апробировался на модельных функциях в работе [163] с помощью метода статистической регуляризации. Модельные функции выбирались такими:

$$\begin{aligned} \varepsilon(r, \theta) &= B \exp[-r^2(a^2 S_\theta^2 + b^2 C_\theta^2) + b^2(2rdC_\theta - d^2)], \\ I(p, \xi) &= \mu^{-1} [1 - \exp(-T(p, \xi))], \\ \kappa(r, \theta) &= \mu \varepsilon(r, \theta), \end{aligned} \quad (10.49)$$

$$\begin{aligned} T(p, \xi) &= B\pi^{1/2} (a^2 C_\xi^2 + b^2 S_\xi^2)^{-1/2} \exp[-[a^2 b^2 (p - dC_\xi)^2 \times \\ &\quad \times (a^2 C_\xi^2 + b^2 S_\xi^2)^{-1}], \\ S_z &\equiv \sin z, \quad C_z \equiv \cos z \end{aligned}$$

и относились к случаю постоянной функции источника $S(\tau)$. Нетрудно также получить выражения, подобные (10.49), для треугольных или параболических функций источника. Первые же модельные расчеты показали, что система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая интегральное уравнение (10.48), является плохо обусловленной, что, вообще говоря, естественно. При этом ее обусловленность очень чувствительна к геометрии разбиения на секторы. Например, устойчивость решения на сетке, приведенной на рис. 45, много выше, чем устойчивость при разбиении, когда координатные оси служат границами секторов.

Для моделирования случайных ошибок измерения на модельные функции $I(p, \xi)$ и $\kappa(r, \theta)$ (которые считались уже определенными с некоторой погрешностью) осуществлялся наброс случайных величин с нулевым средним и заданной дисперсией.

На рис. 46, а в виде изолиний в полярной системе координат представлен результат восстановления функции $\varepsilon(r, \theta)$ при шумах с коэффициентом вариации 1%. Параметры модельной функции (10.49): $a = 3,5$; $b = 2,5$, $\mu = 1$, $B = 1$, $d = 0$. Расчет проводился при равномерном разбиении по θ и r соответственно на 8 колец и 12 секторов. Здесь сплошная линия — точное решение, штриховая — восстановленное. Эти же данные представлены на рис. 46, б в виде поверхностей. Улучшить данный алгоритм можно путем повышения точности аппроксимации $\varepsilon(x, y)$ и $\kappa(x, y)$ на зонах разбиения, а также увеличе-

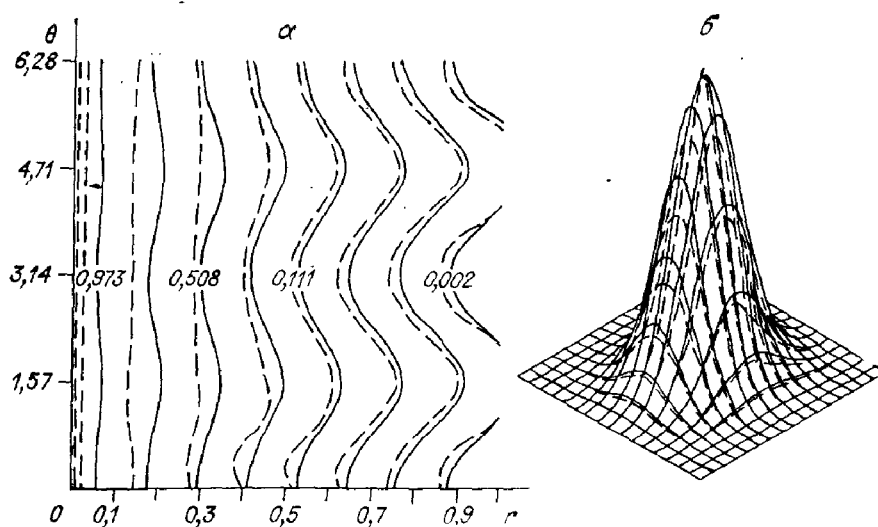


Рис. 46. Примеры восстановления модельных функций (10.7) методом послойного расщепления [263]; $\mu = 1$, погрешность 1%.

ния численной устойчивости за счет большего объема априорной информации в схеме регуляризации [169] с использованием результатов счета на предыдущем слое по r .

Отметим, что в задачах позитронной томографии также возникает проблема решения уравнения (10.46) [268], однако разработанные в этой области алгоритмы пока лишь оперируют со случаем $\kappa = \text{const}$, когда задачу можно существенно упростить, получив аналог обращенной формулы Радона, либо интегральное уравнение 2-го рода [336].

§ 6. Задача трехмерной томографии

Попытки реконструкции асимметричного плазменного объекта без предварительного «рассечения» его системой параллельных плоскостей и в результате этого решения не трехмерной обратной задачи, а набора двумерных задач пока еще единичны [272, 315, 363], хотя теоретически данная проблема обсуждается уже давно [154, 270, 275]. Тем не менее в работе [333] довольно убедительно показано, что задача трехмерной томографии плазмы даже в

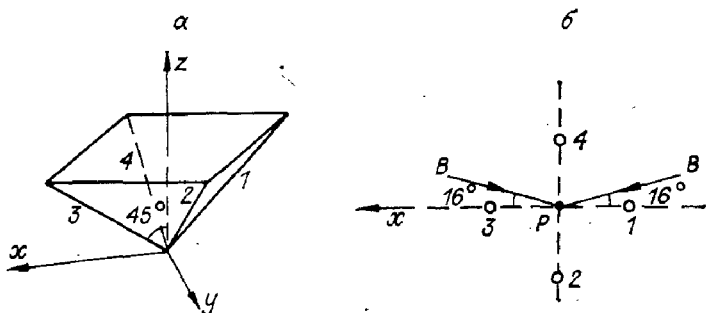


Рис. 47. Схема томографического плазменного эксперимента по четырем направлениям наблюдения.
a — расположение лучей зрения относительно декартовой системы координат; *б* — вид сверху; *B* — направления лучей лазера, лежащих в плоскости (*xy*); *P* — таблетка.

условиях резко стационарного режима и при малых размерах самого объекта может быть успешно решена.

Рассмотрим кратко схему эксперимента, проведенного в [333]. Исследовался очень актуальный в программе лазерного термоядерного синтеза вопрос о степени однородности сжатия микромишени (таблетки сферической формы) в процессе имплозии с помощью CO_2 -лазеров [231]. Рентгеновское излучение образующейся плазмы регистрировалось одновременно четырьмя камерами-обскурами с 9-кратным увеличением, в результате чего информация получалась в виде четырех практически плоских изображений (рис. 47). Предполагалось, что по отношению к выходящему рентгеновскому излучению плазма оптически прозрачна. На рис. 47, *a* показано расположение направлений наблюдения относительно декартовой системы координат, а на рис. 47, *б* в плоскости (*xy*) лежат два луча лазера, падающих на мишень.

При описанной геометрии эксперимента удобно использовать вращающуюся систему координат:

$$\begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = T_j \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (10.50)$$

совмещая каждый раз ось w_j с оптической осью j -й камеры-обскуры и требуя, чтобы ось u_j лежала в горизонтальной плоскости. Тогда матрицы вращения в соответствии

с нумерацией направлений j , данных на рис. 47, имеют вид

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ s & 0 & s \\ -s & 0 & s \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & s \\ 0 & s & s \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & s \\ s & 0 & s \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & s \\ 0 & -s & s \end{bmatrix}, \quad s = 2^{-1/2}.$$

Если φ — искомая трехмерная функция источника (коэффициент испускания), а f_j — регистрируемая двумерная проекция на плоскость, нормальную к направлению j , то справедлива система уравнений

$$\int dw \cdot \varphi \left(T_j^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) = f_j \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right), \quad j = 1, \dots, 4. \quad (10.52)$$

Не уменьшая общности рассуждений, функции f_j можно считать нормированными на единицу, благодаря чему интегральное испускание плазмы окажется равным единице.

В работе [333] использовался метод максимума энтропии Фридена, подробно описанный в гл. 7. В трехмерной форме этот метод сводится к поиску максимума выражения

$$H = - \int dx \int dy \int dz \varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) \ln \left\{ \varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) V \right\} \quad (10.53)$$

при условии выполнения четырех равенств (10.52). Здесь V — объем пространства, в котором $\varphi \geq 0$. Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, можно свести задачу к поиску четырех неизвестных функций двух переменных: $h_j \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right)$. Эти функции, с одной стороны, определяют φ :

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = V^{-1} \prod_j h_j \left(S_j \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right), \quad (10.54)$$

$$\text{где } S = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \end{bmatrix}, \quad (10.55)$$

а с другой — связаны с f_j уравнениями, непосредственно следующими из (10.52):

$$h_j \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) V^{-1} \int dw \prod_{k \neq j} h_k \left(S_k T_j^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) = f_j \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right),$$

$$j = 1, \dots, 4. \quad (10.56)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы нелинейных уравнений (10.56). В работе [333] для этой цели использовалась циклическая итерационная процедура Гаусса — Зайделя, возможности которой подробно исследовались в [331]. За начальное приближение выбиралось следующее:

$$h_j^{(0)} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} 1, & f_j \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \neq 0, \\ 0, & f_j \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = 0. \end{cases} \quad (10.57)$$

Последовательное улучшение приближения состоит в расчете величин $h_j^{(i+1)}$ по формулам

$$h_j^{i+1} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} f_j \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) V \int dw \prod_{k \neq j} h_k^{(i)} \left(S_k T_j^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right), & f_j \neq 0, \\ 0, & f_j = 0 \end{cases} \quad (10.58)$$

для $j = i \bmod 4 + 1$,

$$h_j^{(i+1)} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) = h_j^{(i)} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \quad \text{для } j \neq i \bmod 4 + 1. \quad (10.59)$$

Процедура отличается быстрой сходимостью. Так, для серии примеров восстановления функции φ , рассмотренных Минербо [331, 333], требовалось максимум 6 итераций для того, чтобы $h_j^{(i+1)}$ и $h_j^{(i)}$ совпадали в пределах 1%. Оценки ресурса памяти ЭВМ для реализации всей

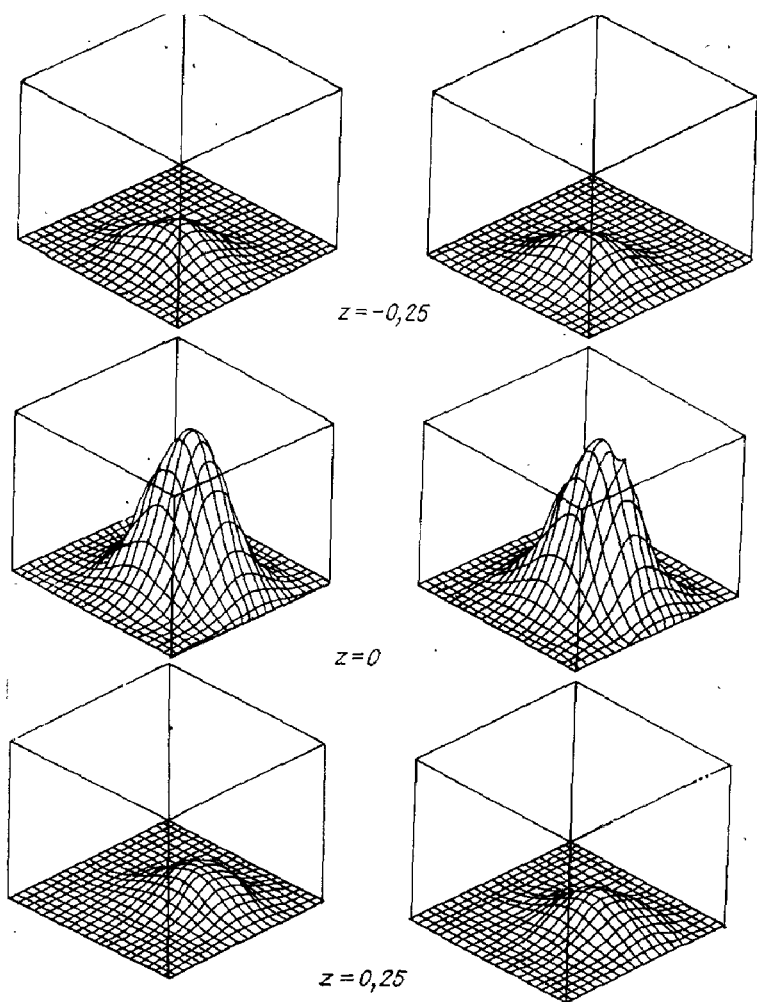


Рис. 48. Исходные (слева) и восстановленные (справа) модельные функции источника (10.60) в трех различных сечениях $z = \text{const}$; функция f_j искажена 5%-ным шумом. Метод максимума энтропии Фридена [333].

описанной схемы, приведенные в гл. 7, показали, что метод максимума энтропии существенно экономичнее методов, основанных, например, на широко распространенных в томографической практике алгоритмах ART.

На рис. 48 показаны результаты математического моделирования эксперимента по лазерной имплозии, когда

за исходный выбирался гауссов профиль:

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = 2 \exp \{ -9 [3x^2 + x(y - 0,1) + 6(y - 0,1)^2 + 2xz + 3z^2] \}. \quad (10.60)$$

Проекции f_j находились численно, согласно (10.52), затем для каждой из них производилась дискретизация на 21×21 одинаковых ячеек (пикселей), расчетные данные искажались 5%-ным нормально распределенным шумом, после чего применялся алгоритм максимума энтропии для восстановления (10.60). На рисунке даны двумерные «срезы» распределения φ при значениях $z = -0,25, 0$ и $0,25$, причем слева изображены исходные, а справа — восстановленные функции. Уровень погрешности не превышал 10%.

В работе [331] описаны результаты более сложного математического эксперимента, когда в качестве исходной функции был взят полый гауссов профиль

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \exp(-a) - \exp(-2a), \quad (10.61)$$

$$a = (7/2) (5x^2 - 2(3)^{-1/2} xy + 7y^2 + 4z^2).$$

Также предполагалось, что имеются четыре направления наблюдения, но изображение для каждой из проекций разбивалось уже на 50×50 пикселей. Если в рассчитанные двумерные функции f_j шумовая составляющая искусственно не вводилась, то уровень случайной погрешности восстановления не превышал 0,1%, однако кратер полости был окаймлен четырьмя ложными пиками, положения которых соответствовали четырем лучам зрения. При введении в f_j случайного 5%-ного шума картина в целом сохранялась, полость отчетливо выявлялась, систематическая ошибка (артефакты) не возрастала, но случайная погрешность увеличивалась, как и в первом примере, примерно до 10%.

При обработке реального эксперимента сечения восстанавливаемой функции источника φ различными плоскостями выводились на цветной дисплей (в условных цве-

тах) при дискретизации каждой картины на 100×100 пикселей; размер каждого пикселя соответствовал 3,3 мкм. Если первоначальный диаметр сферической таблетки составлял 200 мкм, то после обжатия получался несколько сплюснутый эллипсоид вращения со средним диаметром ~ 60 мкм. Восстановление функции источника φ позволило выявить ряд интересных деталей процесса имплозии, в частности наличие эмиттирующего «сателлита», который обязан своим происхождением остаточному фрагменту стеклянной оболочки, покрывавшей таблетку. Серия полученных трехмерных томограмм давала возможность осуществить вполне целенаправленное планирование дальнейших экспериментов по лазерной имплозии.

§ 7. Некоторые вопросы программного обеспечения задач диагностики плазмы

В заключение представляется уместным сделать несколько замечаний общего характера, связанных со статусом неустойчивых задач диагностики плазмы, рассматриваемых с позиций современной математической технологии [92, 100, 250]. Современные тенденции автоматизации плазменного эксперимента и его проведения в режиме реального времени требуют унификации как программ первичной обработки экспериментальных данных, так и программ последующей физической интерпретации. При этом нужно иметь в виду большую общность алгоритмов, широко употребляемых в задачах плазменной диагностики, с алгоритмами, используемыми в физике атмосферы, астрофизике, геофизике, ядерной физике и т. п. Этот перечень можно было бы, вообще говоря, продолжить, упомянув также химическую кинетику, биологию, медицину, многие чисто технические дисциплины. Ясно, что совершенствование математического и программного сопровождения родственных и тем более однотипных задач в различных областях науки возможно лишь в рамках стандартизации вычислительной технологии с переходом к модульному принципу построения комплексов и пакетов программ.

Общий подход к разработке больших программных комплексов (объемом 10^4 — 10^5 команд) в идейном плане в основном можно считать уже сложившимся, в частности,

на основе методов структурного программирования [69, 71, 237]. Подобного рода методы уже использовались при создании комплексов программы научно-технических расчетов таких, как САФРА (система автоматизации физических расчетов) [50, 65], OLYMPUS (система, специально ориентированная на задачи управляемого термоядерного синтеза) [223, 349]. ФИХАР (система программ для реакторных расчетов). [19]. Упомянем также обладающий большими возможностями пакет программ [93], предназначенный для расчетов широкого класса оптико-физических параметров плазмы, в частности термодинамических и радиационных характеристик плазменных объектов с различным компонентным составом в широком диапазоне параметров.

Примеров создания библиотек и пакетов программ, специально ориентированных на задачи диагностики плазмы, пока еще немного. Кроме уже отмечавшейся в гл. 1 системы ЭОС (ИПМ АН СССР) здесь можно упомянуть универсальную библиотеку алгоритмов томографии [305], систему вычислительной графики для трехмерной реконструкции объектов по их сечениям [373], модульную систему программ обработки फिल्मовой информации HYDRA для пузырьковых и искровых камер [56]. Однако можно с достаточной уверенностью утверждать, что в самое ближайшее время разработки в этой области продвинулись намного вперед.

Имеется еще один очень важный и перспективный путь программной модернизации исследований по диагностике плазмы. Речь идет об использовании численно-аналитических выкладок на ЭВМ [53]. Дело в том, что численно-аналитический расчетный подход оказался чрезвычайно плодотворным при исследовании устойчивости высокотемпературной плазмы в замкнутых системах (см., например, [339]). Опыт физиков-теоретиков Института физики плазмы в Гархинге (ФРГ) показал, в частности, что для задач этого типа при традиционном численном расчете с применением даже самых мощных современных ЭВМ и с затратами нескольких часов машинного времени удается лишь (и то не всегда) с минимально допустимой достоверностью судить об устойчивости той или иной плазменной конфигурации. С другой стороны, чисто аналитический расчет тех же задач на ЭВМ редко оказывается осуществимым из-за ограничений машинной памяти и

некоторых других технических и алгоритмических затруднений. Оптимальный путь — разумное совмещение численных и аналитических методов. Правда, этот путь также отнюдь не гладок, поскольку известные системы машинной аналитики значительно более медленные считают по сравнению с такими классическими численными системами, как ALGOL и FORTRAN. Тем не менее интенсивное изучение проблемы численно-аналитического синтеза, проводимое во многих ведущих плазменных и других физических лабораториях, позволяет надеяться на быстрый прогресс.

Разработка эффективного численно-аналитического аппарата для решения сложных неустойчивых задач диагностики плазмы представляется также весьма многообещающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аброян М. А., Каган Ю. М., Колоколов Н. Б. и др. Спектроскопическое определение электронной концентрации в дуге дуоплазмотронного источника ионов.— *Опт. и спектр.*, 1974, т. 36, № 4, с. 644—648.
2. Александров Е. Б., Изотова С. Л., Мамырин А. В. и др. Формирование контуров линии для оптической накачки на резонансных линиях калия.— *Опт. и спектр.*, 1975, т. 38, № 4, с. 818—820.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
4. Алиев Б. Регуляризирующие алгоритмы для нахождения устойчивого нормального решения 2-го рода на спектре.— *ЖВММФ*, 1970, т. 10, № 3, с. 569—576.
5. Алиев Б. Оценка метода регуляризации для интегральных уравнений 2-го рода на спектре.— *ЖВММФ*, 1971, т. 11, № 2, с. 505—510.
6. Алифанов О. М. Граничные обратные задачи теплопроводности.— *ИФЖ*, 1975, т. 29, № 1, с. 7—12.
7. Алифанов О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
8. Алтынцев А. Т., Красов В. И. Локальные измерения энергетического спектра в плазме.— *ЖТФ*, 1977, т. 47, № 1, с. 44—50.
9. Аниконов Ю. И. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978. 118 с.
10. Арсенин В. Я. Об одном способе приближенных решений интегральных уравнений первого рода типа свертки.— *Труды МИ АН СССР*, 1973, т. 133, с. 33—51.
11. Арсенин В. Я., Зябров Н. Б. О построении приближений к оптимальной фильтрации. М.: препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 4. 17 с.
12. Арсенин В. Я., Коробочкин А. Е., Сухоруких В. С., Харитонов А. И. О методе расчета распределения показателя преломления среды по данным интерференционных измерений. М.: препринт ИПМ АН СССР, 1980, № 13, 17 с.
13. Арсенин В. Я., Савелова Т. И. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям 1-го рода типа свертки.— *ЖВММФ*, 1969, т. 9, № 6, с. 1392—1396.

14. Баглай Р. Д. О критерии выбора параметра регуляризации, основанном на вычислении функции чувствительности. — ЖВММФ, 1975, т. 15, № 2, с. 305—320.
15. Бакушинский А. Б. Об одном численном методе решения интегральных уравнений 1-го рода. — ЖВММФ, 1965, т. 5, № 4, с. 744—749.
16. Бакушинский А. Б. Некоторые вопросы теории регуляризирующих алгоритмов. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 12. М.: МГУ, 1969, с. 56—79.
17. Балеску Р. Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, 1967. 514 с.
18. Басов Н. Г., Шиканов А. С., Склизков Г. В. и др. Численная обработка интерферограмм сильно неоднородных фазовых объектов. — Физика плазмы, 1980, т. 6, № 5, с. 1167—1173.
19. Башмачников А. И., Загацкий Б. А., Зизин М. Н. и др. ФИХАР — модульная система программ для реакторных расчетов. — В кн.: Комплексы программ математической физики (СКПМФ № 3). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973, с. 17—26.
20. Биберман Л. М. Перенос излучения в спектральных линиях. — В кн.: Низкотемпературная плазма. М.: Мир, 1967, с. 93—101.
21. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
22. Бояринцев Ю. Е., Васильев В. Г. Об устойчивости метода квазиобращения при решении некорректных эволюционных уравнений. — ЖВММФ, 1969, т. 9, № 4, с. 951—952.
23. Брекбилл Дж. Численная магнитная гидродинамика для плазмы с большим бета. — В кн.: Управляемый термоядерный синтез/Под ред. Дж. Киллина. М.: Мир, 1980, с. 11—50.
24. Булышев А. Е., Ведерников Г. А. Сравнение алгоритмов Крычева и Тихонова, применяемых при решении некорректных задач. — В кн.: Физическая газодинамика. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 173—178.
25. Булышев А. Е., Изотова С. Л., Пикалов В. В. и др. Методы регуляризации в абсорбционной спектроскопии. — В кн.: Некорректные обратные задачи атомной физики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 113—117.
26. Булышев А. Е., Преображенский Н. Г. О восстановлении функции распределения микрополя плазмы по контуру линии $H\beta$. — Опт. и спектр., 1977, т. 43, № 3, с. 565—567.
27. Булышев А. Е., Преображенский Н. Г. К вопросу об информационной обеспеченности метода магнитного сканирования. — Опт. и спектр., 1978, т. 44, № 4, с. 823—824.
28. Булышев А. Е., Преображенский Н. Г. Способы интерпретации многоэкспозиционных изображений потоков двухфазных сред. — Опт. и спектр., 1981, т. 51, № 5, с. 751—753.
29. Булышев А. Е., Преображенский Н. Г., Суворов А. Е. Задача Бибермана — Холстейна с обращением во времени. — В кн.: Сенсibilизированная флуоресценция смесей паров металлов. Вып. 6. Рига, 1977, с. 56—60.
30. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
31. Вайнштейн Б. К. Трехмерная электронная микроскопия биологических макромолекул. — Успехи физ. наук, 1973, т. 109, № 3, с. 455—497.

32. Вайнштейн Л. А. О численном решении интегральных уравнений первого рода с использованием априорных сведений о восстанавливаемой функции.— Докл. АН СССР, 1972, т. 20, № 6, с. 1331—1334.
33. Вайнштейн Л. А., Биргер Е. С., Конохова Н. Б. и др. Коротковолновая диагностика плазменного шнура.— Физика плазмы, 1976, т. 2, № 4, с. 658—671.
34. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М.: Сов. радио, 1972. 744 с.
35. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. М.; Сов. радио, 1978. 272 с.
36. Ведерников Г. А., Преображенский Н. Г. К задаче об исключении аппаратурных искажений сигнала прямоугольной формы.— В кн.: Вопросы газодинамики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1975, с. 255—256.
37. Ведерников Г. А., Преображенский Н. Г. О некорректных обратных задачах восстановления функций с разрывами производных.— Опт. и спектр., 1978, т. 44, № 1, с. 204—205.
38. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев; Наукова думка, 1978. 292 с.
39. Винер Н., Зэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 267 с.
40. Волкова Л. М., Девятов А. М., Кралькина Е. А. Определение функции распределения электронов по энергиям по интенсивностям спектральных линий в плазме газового разряда.— В кн.: Некорректные обратные задачи атомной физики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 92—95.
41. Волкова Л. М., Девятов А. М., Кралькина Е. А. и др. О возможности определения функции распределения электронов по энергиям из интенсивности сплошного спектра.— В кн.: Обработка и интерпретация результатов физических экспериментов. М.; МГУ, 1976, вып. 5, с. 104—107.
42. Волкова Л. М., Девятов А. М., Кралькина Е. А. и др. Определение функции распределения электронов по энергиям по интенсивностям спектральных линий методом регуляризации.— В кн.: Некорректные обратные задачи атомной физики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 73—91.
43. Воронцов С. С., Гаранин А. Ф., Пикалов В. В. Исследование осесимметричного водородного факела оптическим методом.— В кн.: Инверсия Абеля и ее обобщение. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978, с. 244—251.
44. Воскобойников Ю. Е. Критерий и алгоритмы выбора параметра при сглаживании сплайн-функциями.— В кн.: Алгоритмы обработки и средства автоматизации теплофизического эксперимента. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1978, с. 30—45.
45. Воскобойников Ю. Е. Алгоритм обращения уравнения Абеля с использованием кубических сплайнов.— В кн.: Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978, с. 180—189.
46. Воскобойников Ю. Е. Регуляризирующий алгоритм обращения уравнения Абеля.— ИФЖ, 1980, т. 39, № 2, с. 270—274.
47. Воскобойников Ю. Е., Томсонс Я. Я. Выбор параметра регу-

- ляризации и ошибки восстановления входного сигнала в методе статистической регуляризации. — Автометрия, 1975, № 4, с. 10—18.
48. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М.:— Наука, 1967. 415 с.
 49. Вычислительные методы в физике плазмы/Под ред. Ю. Н. Днестровского и Д. П. Костомарова. М.: Мир, 1974. 387 с.
 50. Гайфулин С. А., Карпов В. Я., Мищенко Т. В. САФРА. Функциональное наполнение. Система OLYMPUS. М.: препринт ИИМ АН СССР, 1980, № 27. 16 с.
 51. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.
 52. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщенные функции. Вып. 5). М.: Физматгиз, 1962. 656 с.
 53. Гердт В. П., Тарасов О. В., Ширков Д. В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике. — Успехи физ. наук, 1980, т. 130, № 1, с. 113—147.
 54. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 683 с.
 55. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. — Успехи физ. наук, 1960, т. 70, № 2, с. 201—246.
 56. Говорун Н. Н., Дорж Л., Иванов В. Г. и др. Модульная система программ обработки фильмовой информации. (Обзор материалов по системе HYDRA). — В кн.: Комплексы программ математической физики (СКПМФ № 3). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973, с. 34—41.
 57. Гольцман Ф. М. Статистические модели интерпретации. М.: Наука, 1971. 328 с.
 58. Гончарский А. В., Гущина Л. Г., Леонов А. С. и др. О некоторых алгоритмах отыскания приближенного решения некорректных задач на множестве монотонных функций. — ЖВММФ, 1972, т. 12, № 2, с. 283—297.
 59. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. О применимости принципа невязки в случае нелинейных некорректных задач и о новом регуляризирующем алгоритме их решения. — ЖВММФ, 1975, т. 15, № 2, с. 290—297.
 60. Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. 336 с.
 61. Гончарский А. В., Ягола А. Г. О равномерном приближении монотонного решения некорректных задач. — Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 4, с. 771—773.
 62. Гончарский А. В., Ягола А. Г. О решении интегральных уравнений вида $\int_a^b K(x, s) dg(s) = u(x)$. — Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 2, с. 266—267.
 63. Горбунов А. Д. О решении нелинейных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 8. М.: МГУ, 1967, с. 186—199.

64. Горбунов Е. П., Диестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Определение пространственного распределения плотности плазмы с помощью фазовых измерений. — ЖТФ, 1968, т. 38, № 5, с. 812—817.
65. Горбунов-Посадов М. М., Карпов В. Я., Корягин Д. А. и др. Пакет прикладных программ САФРА. Системное наполнение. М.: Препринт ИПМ АН СССР, № 85, 1977. 27 с.
66. Грибков В. В., Никулин В. Я., Склизков Г. В. Методика двухлучевого интерферометрического исследования осесимметричных конфигураций плотной плазмы. — Квант. электр., 1971, № 6, с. 60—68.
67. Грим Г. Спектроскопия плазмы. М.: Атомиздат, 1969. 452 с.
68. Грим Г. Уширение спектральных линий в плазме. М.: Мир, 1978. 492 с.
69. Дал У., Дейкстра Э., Хоар К. Структурное программирование. М.: Мир, 1975.
70. Денисов А. М. Об аппроксимации квази решений интегрального уравнения Фредгольма 1 рода специального вида. — ЖВММФ, 1972, т. 12, № 6, с. 1565—1568.
71. Дзержинский Ф. Я., Тер-Сааков А. П. Технология программирования — структурный подход. (Учебно-методическое пособие). М.: ЦНИИатоминформ, 1978. 88 с.
72. Емельянов В. А., Жаврид Г. П. Методы численного решения задач, возникающих при оптических исследованиях осесимметричных неоднородностей. — ИФЖ, 1962, т. 5, № 4, с. 64—70.
73. Жуковский Е. Л. Статистическая регуляризация алгебраических систем уравнений. — ЖВММФ, 1972, т. 12, № 1, с. 185—191.
74. Жуковский Е. Л., Морозов В. А. О последовательной байесовской регуляризации алгебраических систем уравнений. — ЖВММФ, 1972, т. 12, № 12, с. 464—465.
75. Заикин П. Н., Меченов А. С. Некоторые вопросы численной реализации регуляризирующего алгоритма для нелинейных интегральных уравнений. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 21. М.: МГУ, 1973, с. 155—163.
76. Зайдель А. Н., Островская Г. В. Лазерные методы исследования плазмы. Л.: Наука, 1977. 222 с.
77. Замалин В. М., Норман Г. Э., Филинов В. С. Метод Монте-Карло в статистической термодинамике. М.: Наука, 1977. 228 с.
78. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов (Метод обратной задачи). М.: Наука, 1980. 320 с.
79. Зимин В. Д., Фрик П. Г. Теневой метод исследования трехмерных неоднородностей. — Опт. и спектр., 1976, т. 40, № 6, с. 1060—1063.
80. Иванов А. В., Скотников М. М. Определение радиального распределения параметров излучения в осесимметричном газовом объекте при наличии самопоглощения. — ПМТФ, 1963, № 4, с. 83—87.
81. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
82. Иванов В. Н. Определение локальной излучательной способности осесимметричного источника излучения. — В кн.: Не-

- корректные обратные задачи атомной физики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 118—123.
83. **Иевлев В. М.** Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
 84. **Изотова С. Л., Канцеров А. И., Фриш М. С.** Измерение сдвига и уширения компонент СТС линий рубидия в присутствии криптона.— *Опт. и спектр.*, 1977, т. 42, № 1, с. 213—215.
 85. **Изотова С. Л., Канцеров А. И., Фриш М. С.** Определение сдвигов и уширений сверхтонких компонент D_2 -линий ^{87}Rb при столкновениях с атомами инертных газов He и Ar.— *Опт. и спектр.*, 1980, т. 49, № 5, с. 1000—1003.
 86. **Интегральные уравнения/Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.** М.: Наука, 1968. 448 с.
 87. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
 88. **Ишимару С.** Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975. 288 с.
 89. **Йон Ф.** Плоские волны и сферические средние. М.: ИЛ, 1958. 158 с.
 90. **Камминс Г. З.** Применение спектроскопии оптического смещения в биологии.— В кн.: Спектроскопия оптического смещения и корреляция фотонов. М.: Мир, 1978, с. 287—331.
 91. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ в нормированных пространствах. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 742 с.
 92. **Карпов В. Я., Корягин Д. А., Самарский А. А.** Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики.— *ЖВММФ*, 1978, т. 18, № 2, с. 458—467.
 93. **Каськова С. И., Романов Г. С., Степанов К. Л. и др.** Пакет модульных программ для расчета оптико-физических параметров плазмы.— В кн.: Комплексы программ математической физики. (СКМФ № 6). Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980, с. 107—112.
 94. **Китаева В. Ф., Осипов Ю. И., Пикалов В. В. и др.** Локальные зондовые измерения плазмы аргонового лазера.— *ЖТФ*, 1978, т. 43, № 8, с. 1663—1671.
 95. **Козлов В. П.** О восстановлении высотного профиля температуры по спектру уходящей радиации.— *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1966, т. 2, № 2 с. 137—148.
 96. **Козлов В. П.** Емкость множества в пространстве сигналов и риманова метрика.— *Докл. АН СССР*, 1966, т. 166, № 4, с. 779—782.
 97. **Козлов В. П.** К вопросу об оптимальной редукции в теории спектральных приборов.— В кн.: Прикладная спектроскопия. М.: Наука, 1969, с. 73—76. (Материалы XVI совещания.)
 98. **Козлов В. П.** Применение информационной метрики в теории спектральных и оптических приборов.— *Труды ГОИ им. С. И. Вавилова*, 1972, т. 41, вып. 474, с. 47—64.
 99. **Козлов В. П.** Математические вопросы обращения радиационных данных.— В кн.: Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978, с. 68—95.
 100. **Коновалов А. Н., Янецко Н. Н.** Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды.— В кн.:

- Комплексы программ математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972.
101. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.
 102. **Коробков М. Е.** Об улучшении разрешения спектров математическими методами.— Журн. прикл. спектр., 1976, т. 25, № 1, с. 160—162.
 103. **Косарев Е. Л.** О численном решении интегрального уравнения Абеля.— ЖВММФ, 1973, т. 13, № 6, с. 1591—1596.
 104. **Кралькина Е. А.** Применение метода регуляризации для диагностики ионизованного газа по экспериментально измеренной интенсивности свечения. Автореф. канд. дис. М.: МГУ, 1977. 15 с.
 105. **Крамер Г.** Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
 106. **Краснов М. Л.** Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.
 107. **Краудиня Э. К., Лица С. Я., Пикалов В. В. и др.** К проблеме исследования атомной сенсibilизированной флуоресценции по контурам спектральных линий.— В кн.: Некорректные обратные задачи атомной физики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 61—72.
 108. **Кросиньяни Б., Ди-Порто П., Бертолотти М.** Статистические свойства рассеянного света. М.: Наука, 1980. 208 с.
 109. **Крылов В. И., Скобля Н. С.** Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.
 110. **Крянев А. В.** Решение некорректных задач методами последовательных приближений.— Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1, с. 20—22.
 111. **Крянев А. В.** Итерационный метод решения некорректных задач.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 1, с. 25—35.
 112. **Кудрин Л. П.** Статистическая физика плазмы. М.: Атомиздат, 1974. 496 с.
 113. **Кузнецов Л. И., Куснер Ю. С., Ленгран Ж.-К. и др.** Исследование плазмы диагностического электронного пучка.— В кн.: Диагностика потоков разреженного газа. Новосибирск; Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1979, с. 65—90.
 114. **Кузнецов Э. И., Щеглов Д. А.** Методы диагностики высокотемпературной плазмы. М.: Атомиздат, 1974. 159 с.
 115. **Кулагин И. Д., Сорокин Л. М., Дубровская Э. А.** Оценка некоторых численных методов решения интегрального уравнения Абеля.— Опт. и спектр., 1972, т. 32, вып. 5, с. 865—870.
 116. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
 117. **Лаврентьев М. М.** Об интегральных уравнениях первого рода.— Докл. АН СССР, 1960, т. 127, № 1, с. 31—35.
 118. **Лаврентьев М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 68 с.
 119. **Лаврентьев М. М., Васильев В. Г.** О постановке некоторых некорректных задач математической физики.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 3, с. 559—576.
 120. **Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г.** Многомер-

- ные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 67 с.
121. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
 122. Ларькина Л. Т. К расчету радиального распределения излучательной способности.— В кн.: Применение плазмотрона в спектроскопии. Фрунзе: Илим, 1970, с. 17—20.
 123. Ларькина Л. Т., Энгельшт В. С. Редукция к однородному оптически тонкому слою в осесимметричных объектах. М.: ВИНТИ, 1973, Деп. № 6917—73. 93 с.
 124. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с ;
 125. Лебедев В. И. О решении на компактных множествах некоторых задач восстановления.— ЖВММФ, 1966, т. 6, № 6, с. 1002—1018.
 126. Леонов А. С. К обоснованию выбора параметра регуляризации по критериям квазиоптимальности и отношения.— ЖВММФ, 1978, т. 18, № 6, с. 1363—1376.
 127. Ливник Ю. В. Метод наименьших квадратов, и основы теории обработки наблюдений. М.: ГИФМЛ, 1958. 334 с.
 128. Лисица В. С. Штарковское уширение линий водорода в плазме.— Успехи физ. наук, 1977, т. 122, № 3, с. 449—495.
 129. Литвинова Н. Н. Статистические методы решения некоторых линейных оптических задач. Автореф. канд. дис. Л.: ЛГУ, 1978. 16 с.
 130. Лохте-Хольтгрёвен В. Определение параметров плазмы.— В кн.: Методы исследования плазмы. М.: Мир, 1971, с.108—168.
 131. Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е. Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979. 232 с.
 132. Малкин О. А. Импульсный ток и релаксация в газе. М.: Атомиздат, 1974. 280 с.
 133. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
 134. Марчук Г. И., Шайдунов В. В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
 135. Маслов В. П. Регуляризация некорректных задач для сингулярных интегральных уравнений.— Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 5, с. 1012—1014.
 136. Мельникова Т. С. Исследования неустойчивостей электрической дуги.— Теплофиз. высоких температур, 1980, т. 18, № 5, с. 949—956.
 137. Мельникова Т. С., Пикалов В. В. Спектральная диагностика нестационарных и асимметричных плазменных объектов.— В кн. Diagnostika plazmatu. Praga, 1979, ITM, p. 91—100.
 138. Мельникова Т. С., Пикалов В. В. Измерение локальных температур в турбулентной плазме.— В кн.: Метрологическое обеспечение измерений высоких температур и параметров плазмы. Харьков, НИИМ, 1979, с. 58—61. (Тезисы докладов.)
 139. Мельникова Т. С., Пикалов В. В. Поле температур винтовой дуги.— В кн.: VIII Всесоюз. конф. по генер. физкотепп. плазмы. Ч. 2. Новосибирск: Ин-т теплофизики, СО АН СССР, 1980, с. 213—216. (Тезисы докладов.)

140. Мельникова Т. С., Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. О локальной диагностике оптически плотной асимметричной плазмы.— *Опт. и спектр.*, 1980, т. 48, № 3, с. 474—479.
141. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике/Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Новосибирск: Наука, 1976. 283 с.
142. Методы исследования плазмы/Под ред. В. Лохте-Хольтгревена. М.: Мир, 1971. 552 с.
143. Миронов Е. П., Пергамент М. И., Тихомиров В. В. и др. Методы расчета функции распределения плотности аксиально-симметричных плазменных образований.— В кн.: *Диагностика плазмы*. Вып. 3. М.: Атомиздат, 1973, с. 128—136.
144. Михайлов Г. А. Некоторые задачи теории и приложений методов Монте-Карло. Новосибирск: препринт ВЦ СО АН СССР, 1977, № 56. 14 с.
145. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. (Неустойчивости неоднородной плазмы.) М.: Атомиздат, 1977. 360 с.
146. Морозов В. А. Об оптимальной регуляризации операторных уравнений.— *ЖВММФ*, 1970, т. 10, № 4, с. 818—829.
147. Морозов В. А. Линейные и нелинейные некорректные задачи.— В кн.: *Итоги науки и техники. Матем. анализ*. М.: ВИНТИ, 1973, с. 129—178.
148. Морозов В. А., Гольдман Н. Л., Самарин М. К. Метод дескриптивной регуляризации и качество приближенных решений.— *ИФЖ*, 1977, т. 33, № 6, с. 1117—1124.
149. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1958. 896 с.
150. Наац И. Э. Теория многочастотного лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск: Наука, 1980. 157 с.
151. Нелинейные волны/Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977. 319 с.
152. Новиков Л. Н., Скроцкий Г. В., Соломахо Г. И. Эффект Ханле.— *Успехи физ. наук*, 1974, т. 113, № 4, с. 597—625.
153. Олейник О. А. Об одной задаче Г. Фикеры.— *Докл. АН СССР*, 1964, т. 157, № 6, с. 1297—1300.
154. Орлов С. С. Теория трехмерной реконструкции.— *Кристаллография*, 1975, т. 20, вып. 3, с. 511—515; вып. 4, с. 701—709.
155. Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В. Голографическая интерферометрия. М.: Наука, 1977. 339 с.
156. Патрик Э. Основы теории распознавания образов. М., Сов. радио, 1980. 408 с.
157. Пергамент А. Х., Тельковская О. В. Метод регуляризации и метод максимального правдоподобия при решении интегральных уравнений 1-го рода. М.: препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 111. 21 с.
158. Пергамент М. И. Методы исследования нестационарных потоков высокотемпературной плазмы.— В кн.: *Физика и применение плазменных ускорителей*. Минск: Наука и техника, 1974, с. 261—288.
159. Перминов В. Д. Численный алгоритм прямого решения вариационной задачи А. Н. Тихонова.— *Уч. зап. ЦАГИ*, 1976, т. 7, № 4, с. 158—162.
160. Петров А. П. Оценки линейных функционалов для решения

- некоторых обратных задач.— ЖВММФ, 1967, т. 7, № 3, с. 648—654.
161. Петров А. П., Хованский А. В. Оценка снизу погрешности, возникающей при решении операторных уравнений 1-го рода на компактах.— ЖВММФ, 1969, т. 9, № 1, с. 194—201.
 162. Петров В. В., Усков А. С. Информационные аспекты проблемы регуляризации.— Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4, с. 780—782.
 163. Пикалов В. В. Некорректные задачи локальной оптической диагностики газовых и плазменных объектов произвольной конфигурации.— В кн.: Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978, с. 25—67.
 164. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. О преобразовании Абеля при голографической интерферометрии точечного взрыва.— Физ. гор. и взрыва, 1974, т. 10, № 6, с. 923—930.
 165. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. О восстановлении локальных характеристик плазмы в условиях ограниченной экспериментальной информации.— Опт. и спектр., 1976, т. 40, № 6, с. 1094—1096.
 166. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. О некоторых проблемах диагностики низкотемпературной плазмы, решаемых с помощью ЭВМ.— В кн.: Свойства низкотемпературной плазмы и методы ее диагностики. Новосибирск: Наука, 1977, с. 138—176.
 167. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Восстановление поля локально равновесных температур среды по излучению.— ИФЖ, 1977, т. 33, № 6, с. 1042—1046.
 168. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Локальная диагностика газовых и плазменных объектов с заданными изолиниями.— Опт. и спектр., 1979, т. 46, № 1, с. 209—211.
 169. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г., Тамбовцев Б. З. Статистическая регуляризация и некоторые новые методы решения условно-корректных задач.— В кн.: Некорректные обратные задачи атомной физики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 17—33.
 170. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г., Фрумин Л. Л. К вопросу о корректной обработке результатов зондовых измерений в неравновесной плазме.— В кн.: Физическая газодинамика. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 181—183.
 171. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г., Ширикова С. Л. Обратные задачи спектроскопии оптически плотной плазмы.— В кн.: Прикладная спектроскопия. М., 1977, с. 122—124. (Труды 18 Всесоюз. съезда по спектроскопии. Горький.)
 172. Подгорный И. М. Лекции по диагностике плазмы. М.: Атомиздат, 1968. 217 с.
 173. Преображенский Н. Г. По поводу так называемых многопараметрических методов диагностики оптически плотной плазмы.— Опт. и спектр., 1966, т. 21, № 2, с. 232—234.
 174. Преображенский Н. Г. Спектроскопия оптически плотной плазмы. Новосибирск: Наука, 1971. 178 с.
 175. Преображенский Н. Г. Диагностические схемы исследования осесимметричной плазмы в условиях ее случайных перемещений.— Nukleonika, 1975, v. 20, N 5, p. 429—438.
 176. Преображенский Н. Г. Абелева инверсия в физических задачах.— В кн.: Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978, с. 6—24.

177. Преображенский Н. Г. Математическое моделирование.— В кн.: Методологические проблемы современной науки. М.: Политиздат, 1979, с. 90—103.
178. Преображенский Н. Г. Об одном методе решения системы уравнений радиационной кинетики.— Изв. вузов. Физика, 1980, № 7, с. 97—100.
179. Преображенский Н. Г., Пикалов В. В. Обратные задачи прикладной спектроскопии.— Приложение к кн.: В. В. Лебедева. Техника оптической спектроскопии. М.: МГУ, 1977, с. 343—371.
180. Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Вопросы параметризации обратных задач прикладной спектроскопии. Новосибирск: препринт ИТПМ СО АН СССР, 1978, № 10. 39 с.
181. Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Статистический анализ задачи определения параметров контуров спектральных линий, уширенных давлением.— Опт. и спектр., 1980, т. 49, № 1, с. 12—18.
182. Преображенский Н. Г., Сенина А. В., Сенина С. В. К расчету функции источника для оптически плотного слоя плазмы.— Изв. вузов. Физика, 1965, № 6, с. 67—74.
183. Преображенский Н. Г., Суворов А. Е. Эффект Ханле в полупрозрачном газе. Новосибирск: препринт ИТПМ СО АН СССР, 1978, № 2. 26 с.
184. Преображенский Н. Г., Тамбовцев Б. З. Исключение аппаратных искажений контура спектральной линии методом статистической регуляризации.— Опт. и спектр., 1973, т. 35, № 5, с. 946—953.
185. Преображенский Н. Г., Тамбовцев Б. З., Шапарев Н. Я. Влияние функции распределения электронов по энергиям на форму и интенсивность спектральной линии.— Изв. СО АН СССР, 1968, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1, с. 28—30.
186. Преображенский Н. Г., Толпина С. П. Восстановление характеристик полидисперсных сред методами спектроскопии оптического смещения.— Опт. и спектр., 1982, т. 52, № 4, с. 696—705.
187. Преображенский Н. Г., Фрумин Л. Л. Анализ разрешающих возможностей интегрального корректора Ван-Циттерта — Бургера.— В кн.: Вопросы газодинамики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1975, с. 252—254.
188. Преображенский Н. Г., Фрумин Л. Л. К вопросу о восстановлении потенциала межмолекулярного взаимодействия по вириальным коэффициентам.— Изв. вузов. Физика, 1980, № 6, с. 30—33.
189. Преображенский Н. Г., Шарарова Т. А. Об использовании инфракрасного континуума в целях диагностики плазмы.— Опт. и спектр., 1971, т. 30, № 6, с. 1009—1014.
190. Пятницкий Л. Н. Лазерная диагностика плазмы. М.: Атомиздат, 1976. 424 с.
191. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. М.: Наука, 1968. 547 с.
192. Раутиан С. Г. Реальные спектральные приборы.— Успехи физ. наук, 1958, т. 66, вып. 3, с. 475—517.
193. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 420 с.

194. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 668 с.
195. **Романов В. Г.** Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972. 163 с.
196. **Самарский А. А.** Численные методы в низкотемпературной плазме. — В кн.: Проблемы теории плазмы/Под ред. А. Г. Ситенко. Киев: ИТФ АН УССР, 1972, с. 331—349.
197. **Свентицкая И. Н.** Определение истинных контуров спектральных линий, измеренных прибором с известной аппаратной функцией. — Журн. прикл. спект., 1973, т. 18, № 4, с. 682—687.
198. **Севастьяненко В. Г.** Перенос излучения. Новосибирск: НГУ, 1979. 90 с.
199. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
200. **Сенина А. В.** К выбору пробных функций в задаче Холстейна. — В кн.: Спектроскопия. Методы и применения. М.: Наука, 1973, с. 7—10.
201. **Соболев В. В.** Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1967. 528 с.
202. **Современные проблемы газовой динамики/Под ред. У. Х. Т. Лоха.** М.: Мир, 1971. 404 с.
203. **Спектроскопия оптического смещения и корреляция фотонов/Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка.** М.: Мир, 1978. 584 с.
204. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Слайды в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
205. **Судаков В. Н., Халфин Л. А.** Статистический подход к корректности задач математической физики. — Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 5, с. 1058—1060.
206. **Тамбовцев Б. З.** Использование методов оптимизации при решении некорректных обратных задач спектроскопии. — В кн.: Некорректные обратные задачи атомной физики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976, с. 129—133.
207. **Тамбовцев Б. З., Дробышевич В. И.** О восстановлении истинного контура спектральной линии из реальных измерений. — Журн. прикл. спект., 1976, т. 24, № 2, с. 310—315.
208. **Тамме Э. Э.** Об устойчивости разностных схем при решении некорректных задач методом квазиобращения. — ЖВММФ, 1972, т. 12, № 5, с. 1319—1325.
209. **Тараско М. З., Крамер-Агеев Е. А., Тихонов Е. Б.** Применение метода направленного расхождения для восстановления дифференциального спектра быстрых нейтронов. — В кн.: Вопросы дозиметрии и защиты от излучений. Вып. 11. М.: Атомиздат, 1970, с. 125—133.
210. **Тихонов А. Н.** Об устойчивости обратных задач. — Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 5, с. 195—198.
211. **Тихонов А. Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. — Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3, с. 501—504.
212. **Тихонов А. Н.** О регуляризации некорректно поставленных задач. — Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1, с. 49—52.
213. **Тихонов А. Н.** О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода. — Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 6, с. 1296—1299.

214. Тихонов А. Н. О нелинейных уравнениях первого рода.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5, с. 1023—1026.
215. Тихонов А. Н. Математические модели и научно-технический прогресс (автоматизация обработки наблюдений).— В кн.: Наука и человечество. М.: Знание, 1979, с. 280—289.
216. Тихонов А. Н., Аликаев В. В., Арсенин В. Я. и др. Определение функции распределения электронов плазмы по спектру тормозного излучения.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, № 5 (11), с. 1903—1908.
217. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 286 с.
218. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода.— ЖВММФ, 1964, т. 4, № 3, с. 564—571.
219. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах.— ЖВММФ, 1965, т. 5, № 3, с. 463—473.
220. Туровцева Л. С. Решение обратных некорректных задач методом статистической регуляризации. (Программа ОБР-23). М.: препринт ИПМ АН СССР, 1975. 86 с.
221. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач.— Успехи физ. наук, 1970, т. 102, вып. 3, с. 345—386.
222. Турчин В. Ф., Туровцева Л. С. Восстановление оптических спектров и других неотрицательных функций по методу статистической регуляризации.— Опт. и спектр., 1974, т. 36, № 2, с. 280—287.
223. Уоткинс М. Л., Хьюджес М. Х., Робертс К. В. и др. IKA-RUS — одномерная модель диффузии плазмы.— В кн.: Управляемый термоядерный синтез. М.: Мир, 1980, с. 178—223.
224. Урюков Б. А. Вероятностная модель электрической дуги в турбулентном потоке.— Изв. СО АН СССР, 1978, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3, с. 24—25.
225. Фаддеева В. Н., Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. 656 с.
226. Френке Л. Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974. 344 с.
227. Фриден Б. Улучшение и реставрация изображений.— В кн.: Обработка изображений и цифровая фильтрация. М.: Мир, 1979, с. 193—270.
228. Фридман В. М. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.— Успехи мат. наук, 1956, т. 11, вып. 1, с. 233—234.
229. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. М.: Сов. радио, 1971.
230. Хант Б. Цифровая обработка изображений.— ТИИЭР, 1975, т. 63, № 4, с. 177—195.
231. Хеглер М., Кристиансен М. Введение в управляемый термоядерный синтез. М.: Мир, 1980, 230 с.
232. Хемминг Р. В. Численные методы. М.: Наука, 1968. 400 с.
233. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 536 с.
234. Хуанг Т., Шрейбер В., Третьяк О. Обработка изображений.— В кн.: Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин. М.: Мир, 1973, с. 17—47.

235. Худак Ю. И. Об одной нелинейной задаче автоматического регулирования. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 14. М.: МГУ, 1970, с. 78—85.
236. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970. 296 с.
237. Хьюз Дж., Мичтом Дж. Структурный подход к программированию. М.: Мир, 1980. 278 с.
238. Хэдди Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967. 507 с.
239. Чайка М. П. Интерференция вырожденных атомных состояний. Л.: ЛГУ, 1975. 192 с.
240. Чан П., Тэлбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. М.: Мир, 1978. 202 с.
241. Челноков М. Б. Определение параметров плазмы по интенсивности сплошного спектра. — Изв. вузов. Физика, 1969, № 1, с. 12—17.
242. Черепашук А. М., Гончарский А. В., Ягола А. Г. Алгоритмы и программа для ЭВМ решения кривой блеска затменной системы, содержащей компоненту с протяженной атмосферой. — Переменные звезды, 1973, т. 18, № 6 (138), с. 535—569.
243. Чечкин А. В. Специальный регуляризатор А. Н. Тихонова для интегральных уравнений 1-го рода. — ЖВММФ, 1970, т. 10, № 2, с. 453—461.
244. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980. 408 с.
245. Шеффилд Дж. Рассеяние электромагнитного излучения в плазме. М.: Атомиздат, 1978. 280 с.
246. Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969. 396 с.
247. Штейн И. Н. О применении преобразования Радона в голографической интерферометрии. — Радиотехн. и радиоэлектр., 1972, т. 17, № 11, с. 2436—2437.
248. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1074 с.
249. Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы. М.: Мир, 1974. 432 с.
250. Яненко Н. Н., Карначук В. И., Коновалов А. Н. Проблемы математической технологии. — Числен. методы мех. сплошн. среды, Новосибирск, 1977, т. 8, № 3, с. 129—157.
251. Яненко Н. Н., Карначук В. И., Коновалов А. Н. Математическая технология. — В кн.: Фундаментальные и прикладные исследования в условиях НТР. Новосибирск: Наука, 1978, с. 10—37.
252. Amemiya H. A deconvolution method for measuring the energy distribution function in plasmas. — Japan J. Appl. Phys., 1975, v. 14, N 1, p. 165—166.
253. Arbuzov A. S., Devyatov A. M., Shushurin S. P. e. a. On the calculation of electron distribution in gas discharge plasma from spectral line intensities by Tichonov's regularization method. — Proc. 10-th ICPIG. Oxford: Contrib. Pap., 1971, p. 387.
254. Armstrong B. H., Nicholls R. W. Emission, absorption and transfer of radiation in heated atmospheres. Oxford: Pergamon Press, 1972. 296 p.
255. Attwood D. T., Sweeney D. W., Auerbach J. M. e. a. Interferometric confirmation of radiation pressure effects in laser-plasma interactions. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, N 3, p. 184—187.

256. **Barakat R., Blackman E.** Application of Tichonov regularization algorithm to object restoration.— *Opt. Commun.*, 1973, v. 9, N 3, p. 252—256.
257. **Baranger M., Moser B.** Electric field distribution in an ionized gas.— *Phys. Rev.*, 1959, v. 115, N 3, p. 521—525.
258. **Barr W.** Method for computing the radial distribution of emitters in a cylindrical source.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1962, v. 52, N 8, p. 885—888.
259. **Barton C. F.** Computerized axial tomography for neutron radiography of nuclear fuel.— *Trans. Amer. Nucl. Soc.*, 1977, v. 27, N 2, p. 212—213.
260. **Behringer K.** Präzisionmessungen am Spectrum des Wasserstoffplasmas.— *Z. Phys.*, 1974, Bd. 246, H. 4, S. 333—347.
261. **Bielski A., Kaszmarek W., Kubrycht J. e. a.** On the determination of the radial intensity distribution of radiation in cylindrical plasma.— *Acta Phys. Polon.*, 1968, v. 33, N 5, p. 701—709.
262. **Birkeland J. W., Oss J. P.** Spatial resolution of the volume emission coefficient in strongly self-absorbing sources of cylindrical symmetry.— *Appl. Opt.*, 1968, v. 7, N 8, p. 1635—1639.
263. **Blagoev A. B., Kagan Ju. M., Kolokolov N. B. e. a.** Influence of the amplitude of the superimposed potential oscillations on probe measurements of the electron distribution function.— *Proc. 12-th ICPIG, Eindhoven, Contrib. Pap.*, part 1, 1975, p. 385.
264. **Bockasten K.** Transformation of observed radiances into radial distribution of the emission plasma.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1961, v. 51, N 9, p. 943—947.
265. **Bracewell R. N., Wernecke S. J.** Image reconstruction over a finite field of view.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1975, v. 65, N 11, p. 1342—1346.
266. **Brinkman H.** *Optische studie van de elektrische Lichtboog.* Thesis Holland, Univ. Utrecht, 1937.
267. **Brolley J. E., Lazarus R. B., Suydam B. R.** Maximum entropy restoration of laser fusion target X-ray photographs.— *In: 1976 SPSE Conf. Proc. (ed. R. Shaw), Washington: D. C.*, 1977, p. 244—248.
268. **Budinger T. F., Gullberg G. T.** Three-dimensional reconstruction in nuclear medicine emission imaging.— *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 1974, v. NS-21, N 3, p. 1—20.
269. **Bulyshv A. E., Preobrazhensky N. G., Suvorov A. E.** Retrieval of fundamental distribution functions for hydrogen plasma from spectroscopic data.— *Proc. 13-th ICPIG, Berlin: Contrib. Pap.*, 1977, v. 1, p. 143—144.
270. **Chau H. H., Zucker O. S. F.** Holographic thin-beam reconstruction technique for the study of 3-D refractiveindex field.— *Opt. Commun.*, 1973, v. 8, N 4, p. 336—339.
271. **Chen F. P., Goulard R.** Retrieval of arbitrary concentration and temperature fields by multiangular scanning techniques.— *JQSRT*, 1976, v. 16, N 10, p. 819—827.
272. **Colscher J. G.** Iterative three-dimensional image reconstruction from tomographic projections.— *Comp. Graph. Image Process.*, 1977, v. 6, N 6, p. 513—537.
273. **Cormack A. M.** Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications.— *J. Appl. Phys.*, 1963, v. 34, N 9, p. 2722—2727.

274. **Cormack A. M.** Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. II.— *Ibid*, 1964, v. 35, N 10, p. 2908—2913.
275. **Cormack A. M.** Reconstruction of densities from their projections, with applications in radiological physics.— *Phys. Med. Biol.*, 1973, v. 18, N 2, p. 195—207.
276. **Courant R.** Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1943, v. 49, N 1, p. 1—23.
277. **Cremers C. J. Birkebak R. C.** Application of the Abel integral equation to spectroscopic data.— *Appl. Opt.*, 1966, v. 5, N 6, p. 1057—1064.
278. **Cuperman S.** Impurity radiation from non-Maxwellian spherical plasmas.— *Phys. Fluids*, 1964, v. 7, N 6, p. 803—806.
279. **Douglas J. Jr.** A numerical method for analytic continuation.— In: *Boundary problems in differential equations Proc. Sympos.*, Madison Wisconsin Press, 1960, p. 206—209.
280. **Douglas J. Jr., Gallie T. M.** An approximate solution of an improper boundary value problem.— *Duke Math. J.*, 1959, v. 26, N 3, p. 339—347.
281. **Edels H., Hearne K., Young A.** Numerical solution of the Abel integral equation.— *J. Math. Phys.*, 1962, v. 41, N 1, p. 62—75.
282. **Elder P., Jerrick J., Birkeland J. W.** Determination of the radial profile of absorption and emission coefficients and temperature in cylindrically symmetric sources with self-absorption.— *Appl. Opt.*, 1965, v. 4, N 5, p. 589—592.
283. **Engelsht V. S., Larkina L. T.** Determination of spectral emission and absorption coefficients in axisymmetric plasmas.— *JQSRT*, 1979, v. 21, N 1, p. 65—73.
284. **Fabry M., Gussenot J. R., Richard M.** Méthode de calcul du coefficient d'émission d'un plasma cylindrique a partir du profil expérimental de l'intensité.— *Opt. Commun.*, 1972, v. 5, N 4, p. 252—255.
285. **Falconer D. G.** Image enhancement and film-grain noise.— *Optica Acta*, 1970, v. 17, N 9, p. 693—705.
286. **Fleurier C., Chapelle J.** Inversion of Abel's integral equation — application to plasma spectroscopy.— *Comp. Phys. Commun.*, 1974, v. 7, N 4, p. 200—206.
287. **Franklin J. N.** Well-posed stochastic extensions of illposed linear problems.— *J. Math. Anal. and Appl.*, 1970, v. 31, N 3, p. 682—716.
288. **Freeman M., Katz S.** Determination of the radial distribution of brightness in a cylindrical luminous medium with self-absorption.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1960, v. 50, N 8, p. 826—830.
289. **Freeman M., Katz S.** Determination of a radiance distribution of an optically thin radiating medium.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1963, v. 53, N 10, p. 1172—1179.
290. **Frie V. W.** Zur Auswertung der Abelschen Integralgleichung.— *Ann. Phys.*, 1963, Bd 10, H. 4, S. 332—339.
291. **Frieden B. R.** Restoring with maximum likelihood and maximum entropy.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1972, v. 62, N 4, p. 511—518.
292. **Frieden B. R., Burke J. J.** Restoring with maximum entropy, II: superresolution of photographs of diffraction-blurred impulses.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1972, v. 62, N 10, p. 1202—1210.

293. **Glasser J., Chapelle J., Boettner J. C.** Abel inversion applied to plasma spectroscopy: a new interactive method.— *Appl. Opt.*, 1978, v. 17, N 23, p. 3750—3754.
294. **Gordon R.** A tutorial on ART.— *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 1974, v. NS-21, N 3, p. 78—93.
295. **Gorenflo R., Kovetz Y.** Solution of an Abel-type integral equation in the presence of noise by quadratic programming.— *Numer. Math.*, 1966, v. 8, N 4, p. 392—406.
296. **Gouesbet G.** Laser-Doppler velocimetry in ionized gases: a review paper.— *J. de physique, Colloque C7, suppl.*, 1979, v. 40, N 7, p. 789—790.
297. **Hadamard J.** Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques. Paris: Hermann, 1932.
298. **Harris I. L.** Diffraction and resolving power.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1964, v. 54, N 7, p. 931—936.
299. **Herlitz S. I.** Method for computing the emission distribution incylindrical light sources.— *Arkiv för Fysik*, 1963, Bd 23, N 49, 571—574.
300. **Hill N. R., Ioup G. E.** Convergence of the van Cittert iterative method of deconvolution.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1976, v. 66, N 5, p. 487—489.
301. **Hooper C. F.** Low frequency component electric microfield distribution in plasmas.— *Phys. Rev.*, 1968, v. 165, N 1, p. 215—222.
302. **Hounsfield G. N.** Computerized transverse axial scanning (tomography). I: Description of system.— *Brit. J. Radiol.*, 1973, v. 46, p. 1016—1022.
303. **Hörmann H.** Temperaturverteilung und Elektronendichte in frei brennenden Lichtbogen.— *Z. Phys.*, 1935, Bd 97, H. 6, S. 539—560.
304. **Huang T. S., Barker D. A., Berger S. P.** Iterative image restoration.— *Appl. Opt.*, 1975, v. 14, N 5, p. 1165—1168.
305. **Huesmann R. H., Gullberg G. T., Greenberg W. L. e. a.** RECLBL — Library users manual on donner algorithms for reconstruction tomography. Lawrence Berkeley Lab. Publication PUB 214, 1977.
306. **Jacquinet P., Roizen-Dossier B.** Apodisation.— In: *Progress in Optics*, v. 3/Ed. E. Wolf, Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1964, p. 29—186.
307. **Jansson P. A., Hunt R. H., Plyler E. K.** Resolution enhancement of spectra.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1970, v. 60, N 5, p. 596—599.
308. **Jaynes E. T.** Prior probabilities.— *Trans. IEEE*, 1968, v. SSC-4, N 2, p. 227—241.
309. **Junginger H.-G., van Haeringen W.** Calculation of threedimensional refractive-index field using phase integrals.— *Opt. Commun.*, 1972, v. 5, N 1, p. 1—4.
310. **Keller R.** A new numerical procedure to smooth experimental data for the performance of an inverse Abel transformation.— *Proc. 10-th ICPIG*. Oxford: Contrib. Pap., 1971, p. 395.
311. **Kock M., Richter J.** Meßfehler und Lösung einer Abelschen Integralgleichung.— *Ann. Phys.*, 1969, Bd 24, H. 1, S. 30—37.
312. **Kohn J., Nirenberg L.** Non coercitive boundary value problems.— *Commun. Pure Appl. Math.*, 1965, v. 18, N 5, p. 443—492.
313. **Kosarev E. L.** Application of integral equations of the first kind

- in experimental physics.— *Comput. Phys. Commun.*, 1980, v. 20, N 1, p. 69—75.
314. **Kourganoff V.** Basic methods in transfer problems. Oxford: Clarendon Press, 1952. 282 p.
315. **Kowalski G.** Multislice reconstruction from twin-cone beam scanning.— *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 1979, v. NS-26, N 2, p. 2895—2903.
316. **Kreiss H. O.** Über die Stabilitätsdefinition für Differenzgleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren.— *BIT*, 1962, Bd 2, S. 153—181.
317. **Kreiss H. O.** On difference approximation of dissipative type for hyperbolic differential equations.— *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, v. 17, N 3, p. 335—353.
318. **Kunasz C. V., Jefferies J. T., White O. R.** Inversion of the solar limb — darkening equation in the presence of noise.— *Astron. and Astrophys.*, 1973, v. 28, N 1, p. 15—26.
319. **Ladenburg R., Winckler J.; van Voorhis C. C.** Interferometric studies of faster than sound phenomena. I — The gas flow around various objects in a free, homogeneous, supersonic air stream.— *Phys. Rev.*, 1948, v. 73, N 11, p. 1359—1377.
320. **Lapworth K. G., Allnut L. A.** A fully automatic optical system for determining the volume emission coefficient of radiation throughout plasmas.— *J. Phys. E.: Sci. Instrum.*, 1977, v. 10, N 7, p. 727—732.
321. **Lax P. D., Wendroff B.** On the stability of difference schemes with variable coefficients.— *Commun. Pure Appl. Math.*, 1961, v. 14, p. 497—520.
322. **Lent A.** A convergent algorithm for maximum entropy image restoration, with a medical X-ray application.— In: 1976 SPSE Conf. Proc. (ed. R. Shaw). Washington: D. C., 1977, p. 249—257.
323. **Mach L.** Weitere Versuche über Projectile.— *Wien. Akad. Ber. Math.*— *Phys.*, 1896, Bd 105, S. 605.
324. **Maldonado C. D.** Note on orthogonal polynomials which are «invariant in form» to rotations of axes.— *J. Math. Phys.*, 1965, v. 6, N 12, p. 1935—1938.
325. **Maldonado C. D., Caron A. P., Olsen H. N.** New method for obtaining emission coefficients from emitted spectral intensities. Part 1 — Circularly symmetric light sources.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1965, v. 55, N 10, p. 1247—1254.
326. **Maldonado C. D., Olsen H. N.** New method for obtaining emission coefficients from emitted spectral intensities. Part 2. Asymmetrical sources.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1966, v. 56, N 10, p. 1305—1313.
327. **Martinet B.** Regularization d'inequations variationnelles par approximations successives.— *Rev. franc. inform. rech. Opérat.*, 1970, v. R3, p. 154—158.
328. **Matulka R. D., Collins D. J.** Determination of three-dimensional density fields from holographic interferograms.— *J. Appl. Phys.*, 1974, v. 42, N 3, p. 1109—1119.
329. **Measures R., Houston W., Stephenson D.** Spectroscopy by timing decay of laser induced fluorescence.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1975, v. 65, N 2, p. 199—204.
330. **Mersereau R. M., Oppenheim A. V.** Digital reconstruction of multidimensional signals from their projections.— *Proc. IEEE*, 1974, v. 62, N 10, p. 1319—1338.

331. **Minerbo G.** MENT: A maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection Data.— *Comp. Graph. Image Process.*, 1979, v. 10, N 1, p. 48—68.
332. **Minerbo G. N., Levy M. E.** Inversion of Abel's integral equation by means of orthogonal polynomials.— *SIAM J. Numer. Anal.*, 1969, v. 6, N 4, p. 598—616.
333. **Minerbo G. N., Sanderson J. G., van Hulsteyn D. B. e. a.** Three-dimensional reconstruction of the X-ray emission in laser imploded targets.— *Appl. Opt.*, 1980, v. 19, N 10, p. 1723—1728.
334. **Myers B. R., Levine M. A.** Two-dimensional spectral line emission reconstruction as a plasma diagnostic.— *Rev. Sci. Instrum.*, 1978, v. 49, N 5, p. 610—616.
335. **Nestor O. H., Olsen H. N.** Numerical methods for reducing line and surface probe data.— *SIAM Rev.*, 1960, v. 2, N 3, p. 200—207.
336. **Netefer F.** On the inversion of the attenuated Radon transform.— *Num. Math.*, 1979, v. 32, p. 431.
337. **Olsen H. N., Maldonado C. D., Duckworth G. D.** A numerical method for obtaining integral emission coefficients from externally measured spectral intensities of asymmetrical plasmas.— *JQSRT*, 1968, v. 8, N 10, p. 1419—1430.
338. **Olsen H. N., Maldonado C. D., Duckworth G. D., Caron A. P.** Investigation of the interaction of an external magnetic field with an electric arc.— *ARL Report 66—0016*, 1966. 100 p.
339. **Pfirsch D.** MHD-Stabilität von Tokamak- und Spheromak — Gleichgewichten mit Oberflächenstrom.— *Max-Planck-Institut für Plasmaphysik. Garching bei München, 1979, Jahresbericht*, S. 71—78.
340. **Phillips D. L.** A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind.— *J. Ass. Comp. Mach.*, 1962, v. 9, N 1, p. 84—97.
341. **Pickalov V. V., Preobrazhensky N. G.** Algorithms for optical diagnostics of plasma layers with complicated geometry and different transmissivity.— *Proc. 13-th ICPIG, Contrib. Pap., Part 1*, Berlin, 1977, p. 201—202.
342. **Pickalov V. V., Preobrazhensky N. G.** Restoration of two-dimensional radiation fields for an optically thick plasma.— *J. de Physique*, 1979, t. 40, N 7, suppl. C — 7, p. 329—330.
343. **Pucci C.** Sui problemi Cauchy non «ben posti».— *Atti Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis. mat. e. natur.*, 1955, v. 18, N 5, p. 473—477.
344. **Pucci C.** Discussione del problema di Cauchy pur le equazioni di tipo ellittico.— *Ann. mat. pura ad appl.*, 1958, v. 46, p. 131—154.
345. **Radon J.** Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte läng gewisser Mannigfaltigkeiten.— *Ber. Saechs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys.*, 1917, Kl. Bd 69, S. 262—279.
346. **Richardson L. F.** The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stress in a masonry dam.— *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1910, v. 210, p. 307—357.
347. **Richardson L. F.** The differed approach to the limit. I. Single lattice.— *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1927, v. 226, p. 299—349.

348. **Rino C. I.** Band-unlimited image restoration by linear mean-square estimation.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1969, v. 59, N 5, p. 547—553.
349. **Roberts K. V.** An introduction to the OLYMPUS System.— *Comput. Phys. Commun.*, 1974, v. 7, N 3, p. 245—252.
350. **Rosenbluth M. N., Rostocker N.** Scattering of electromagnetic waves by a nonequilibrium plasma.— *Phys. Fluids*, 1962, v. 5, N 7, p. 788—793.
351. **Rushforth C. K., Harris R. W.** Restoration, resolution and noise.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1968, v. 58, N 4, p. 539—545.
352. **Sauthoff R. N., Von Goeler S.** Techniques for the reconstruction of two-dimensional images from projections.— *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1979, v. PS-7, N 3, p. 141—147.
353. **Sauthoff N. R., Von Goeler S., Stodiek W.** A study of disruptive instabilities in the PLT tokamak using X-ray techniques.— *Nucl. Fusion*, 1978, v. 18, N 10, p. 1445—1458.
354. **Sebald N.** Temperature measurements on a steady magnetically balanced cross-flow nitrogen arc.— *Proc. 12-th ICPIG, Contrib. Pap., Eindhoven*, 1975, p. 187.
355. **Schardin H.** Theorie und Anwendung des Mach-Zehnderschen Interferenz-Refraktometers.— *Z. Instrum.*, 1933, Bd 53, N 4, S. 396—424.
356. **Shaw C. B.** Improvement of the resolution of an instrument by numerical solution of an integral equation.— *J. Math. Anal. and Appl.*, 1972, v. 37, N 1, p. 83—112.
357. **Slepian D.** Linear least — square filtering of distorted images.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1967, v. 57, N 7, p. 918—922.
358. **Smarzewski R., Malinowski H.** Numerical solutions of a class of Abel integral equations.— *J. Inst. Math. Appl.*, 1978, v. 22, N 1, p. 159—170.
359. **Smith K. T., Solmon D. C., Wagner S. L.** Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1977, v. 83, N 6, p. 1227—1270.
360. **Strand O. N., Westwater E.** Statistical estimation of the numerical solution of a Fredholm integral equations of the first kind.— *J. Assoc. Comp. Mach.*, 1968, v. 15, N 1, p. 100—144.
361. **Sweeney D. W.** Comparison of Abel — inversion schemes for interferometric applications.— *J. Opt. Soc. Amer.* 1974, v. 64, N 4, p. 559.
362. **Sweeney D. W., Vest C. M.** Measurement of three-dimensional temperature fields above heated surface by holographic interferometry.— *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 1974, v. 17, N 12, p. 1443—1454.
363. **Tam K. C., Perez-Mendez V., Macdonald B.** 3-D object reconstruction in emission and transmission tomography with limited angular input.— *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 1979, v. NS-26, N 2, p. 2797—2805.
364. **Tanner L. H.** The application of Berry-Gibbs theory to phase objects, using interferometry, holography or schlieren methods.— *J. Phys. E: Sci. Instr.*, 1970, v. 3, N 12, p. 987—990.
365. **Tiller W.** The temperature field of the full circle arc.— *Proc. 12-th ICPIG, Eindhoven: Contrib. Pap.*, 1975, p. 187.

366. **Trigt C. V.** On the inversion of an Abel equation.— Proc. 10-th ICPIG, Oxford: Contrib. Pap., 1971, p. 396.
367. **Twomey S.** On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature.— J. Ass. Comp. Mach., 1963, v. 10, N 1, p. 97—101.
368. **Twomey S.** The application of numerical filtering to the solution of integral equations encountered in indirect sensing measurements.— J. Franklin Inst., 1965, v. 279, N 2, p. 95—109.
369. **Ugniewsky S., Sadowski M.** On numerical processing the interferograms of axially symmetrical plasma discharges.— Acta Physica Polonica, 1977, v. A-51, N 2, p. 293—300.
370. **Unsöld A.** Physik der Sternatmosphären. Berlin: Springer-Verlag, 1955. 720 S.
371. **Valentini H.-B.** Momentengleichungen für Plasmen mit anisotropem Neutralgasdruck und anisotropem Ionendruck.— Beiträge aus der Plasma Physik, 1976, Bd 16, N 3, S. 181—195.
372. **Valentini H.-B.** The theory of the low pressure discharge in the strong ionization regime.— Beiträge aus der Plasma Physik, 1979, Bd 19, N 2, S. 81—96.
373. **Veen A., Peachey L. D.** TROTS: a computer graphics system for three— dimensional reconstruction from serial sections.— Comput. and Graphics, 1977, v. 2, N 2, p. 135—150.
374. **Vemuri V., Chen Fang — Pai.** An initial value method for solving Fredholm integral equation of the first kind. — J. Franklin Inst., 1974, v. 297, N 3, p. 187—200.
375. **Volkova L. M., Devyatov A. M., Kralkina E. A. e. a.** Application of regularization algorithms for calculation of electron energy distribution function in plasma of gas discharge.— Proc. 12-th ICPIG, Eindhoven: Contrib. Pap., 1975, p. 384.
376. **Von Calker J. V., Fischer D.** Über den Einsatz von Spline-Funktionen zur Glättung von Meßwerten bei der Abel-Inversion.— Ann. Phys., 1976, Bd 33, H. 3, S. 191—198.
377. **Von Neumann J., Richtmyer R.** A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks.— J. Appl. Phys., 1950, v. 21, N 2, p. 232.
378. **Walsh P. J.** Imprisonment of resonance radiation in a gaseous discharge.— Phys. Rev., 1957, v. 107, N 2, p. 338—344.
379. **Wharton C. B.** Diagnostics for fusion experiments.— Physics Today, 1979, v. 32, N 5, p. 52—60.
380. **Wiener N.** Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications. N. Y.: Wiley, 1946. 308 p.
381. **Williamson J. H., Clarke M. E.** Construction of electron distribution functions from laser scattering spectra.— J. Plasma Physics, 1971, v. 6, part 1, p. 211—221.
382. **Winckler J.** The Mach interferometer applied to studying an axially symmetric supersonic air jet.— Rev. Sci. Instrum., 1948, v. 19, N 5, p. 307—322.

*Николай Георгиевич Преображенский
Валерий Владимирович Пикалов*

НЕУСТОЙЧИВЫЕ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ ПЛАЗМЫ

Ответственный редактор *Алексей Кузьмич Ребров*

Утверждено к печати Институтом теоретической
и прикладной механики СО АН СССР

Редактор издательства *Л. П. Гольмиева*
Художественный редактор *Т. Ф. Каминина*
Художник *В. И. Шумаков*
Технический редактор *Н. М. Бурлаченко*
Корректоры *К. И. Сергеева, Г. И. Шведкина*

ИБ № 23172

Сдано в набор 26.11.81. Подписано в печать 23.09.82. МН-12061. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 12,6. Усл. кр.-отт, 12,6. Уч.-изд. л. 16. Тираж 1800 экз. Заказ № 805. Цена 2 р. 70 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099,
Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука», 630077,
Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

**В СИБИРСКОМ ОТДЕЛЕНИИ
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»**

готовятся к выпуску в 1983 году следующие книги:

Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. 20 л.

Бухгейм А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. 14 л.

Горение в сверхзвуковом потоке. 20 л.

Гриднев Е. П., Кацнельсон С. С., Фомичев В. П. МГД-генераторы переменного тока с T -слоем. 14 л.

Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. 16 л.

Марчук А. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. Численное моделирование волн цунами. 15 л.

Проблемы математики и механики. 20 л.

Шепеленко В. Н. ФОРТРАН ЭВМ БЭСМ-6. 5 л.

Книги высылаются наложенным платежом. Заказы направляйте по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Морской проспект, 22, магазин «Наука».